

(1) mindkét oldalát 4-gyel megszorozzuk, majd teljes négyzetté egészítjük ki:

$$(4x^2 + 4ax + a^2) - (4y^2 + 4cy + c^2) = a^2 - 4b - c^2 + 4d.$$

Így ha az

$$X = (2x + a) + (2y + c),$$

$$Y = (2x + a) - (2y + c),$$

$$A = a^2 - 4b - c^2 + 4d$$

jelöléseket bevezetjük, akkor (1) az $XY = A$ alakra hozható. Mivel az (X, Y) számpár egyértelműen meghatározza az (x, y) számpár értékét, ha (1) végtelen sok (x, y) számpárra teljesül, akkor X és Y közül valamelyik végtelen sok különböző értéket vehet fel, melyek mind osztói A -nak. Így szükségképpen $A = 0$, tehát $a^2 - 4b = c^2 - 4d$, a feltétel szükséges.

Belátjuk, hogy elégséges is, azaz $A = 0$ esetén találhatunk végtelen sok (1)-et kielégítő egészekből álló (x, y) számpárt. Mivel (1) akkor és csak akkor teljesül, ha $XY = A = 0$, azért X és Y közül valamelyik szükségképpen 0. Legyen például $Y = 0$, ekkor az (x, y) számpárt a

$$2x + a + 2y + c = X,$$

$$2x + a - 2y - c = Y = 0$$

egyenletrendszer megoldása adja, azaz

$$x = \frac{1}{4}(X - 2a), \quad y = \frac{1}{4}(X - 2c).$$

Az $a^2 - 4b = c^2 - 4d$ feltételből következik, hogy a és c paritása megegyezik. Így ha X olyan páros szám, amelyre $X/2$ az a -val és c -vel megegyező paritású, akkor az egyenletrendszer megoldásai is egészek. Mivel végtelen sok ilyen X egész szám van, és ezek mindegyikére (x, y) számpár különböző, ezért végtelen sok, (1)-et kielégítő (x, y) számpárt találtunk.

Danyi Pál (Pécs, Nagy Lajos Gimn., I. o. t.)

Megjegyzés. Abban az esetben, amikor $c = d = 0$, a feladat állítása azt jelenti, hogy az $x^2 + ax + b$ polinom akkor és csak akkor lesz végtelen sok különböző egész helyen négyzetszám, ha a polinom egy elsőfokú polinom négyzete.