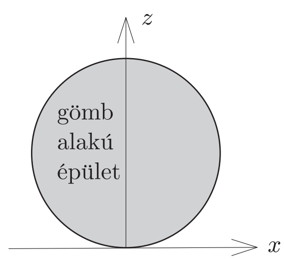
43. Nemzetközi Fizikai Diákolimpia elméleti feladatai[1]

1. feladat. Ragadd meg a lényeget! (13 pont)[2]

***A* rész. Hajítás (4,5 pont).** Egy v_0 kezdősebességgel elhajított golyó homogén gravitációs térben mozog az $x-z$ síkban, ahol az x-tengely vízszintes, a z-tengely pedig függőleges, a $\boldsymbol{g}$ nehézségi gyorsulással ellentétes irányú. A közegellenállást hanyagold el!

***i* (0,8 pont).** A golyót rögzített v_0 nagyságú kezdősebességgel az origóból különböző irányokban elindítva azok a célpontok találhatók el, melyek a $z \le z_0 - kx^2$ egyenlőtlenséggel adott tartományban helyezkednek el (ezt a tényt bizonyítás nélkül felhasználhatod). Határozd meg a z_0 és k konstansok értékét!

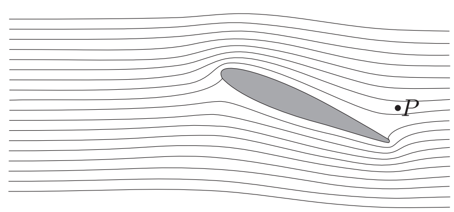
***ii* (1,2 pont).** Ebben a részben a kilövési pont szabadon választható a $z = 0$ talajszinten, és a kilövés szöge is alkalmasan választható. Célunk: a lehető legkisebb v_0 kezdősebességgel szeretnénk eltalálni egy R sugarú, gömb alakú épület legfelső pontját (lásd az *1. ábrát*). (A célpont elérése előtt a golyó nem pattanhat az épületen.) Vázold fel a golyó optimális pályájának alakját!



1. ábra

***iii* (2,5 pont).** Mekkora minimális $v_{\min}$ kilövési sebesség szükséges az R sugarú, gömb alakú épület legfelső pontjának eltalálásához?

***B* rész. Légáramlás a szárny körül (4 pont).** Ebben a részben hasznosak lehetnek a következő információk: Folyadék vagy gáz csőben történő áramlása esetén egy áramvonal mentén $p + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{const.}$, feltéve, hogy a v sebesség sokkal kisebb a hangsebességnél. Itt ρ a sűrűség, h a magasság, g a nehézségi gyorsulás és p a nyomás. Az áramvonalakat a részecskék pályájaként definiálhatjuk, amennyiben az áramlás stacionárius. Az $\frac{1}{2}\rho v^2$ tagot dinamikus nyomásnak nevezzük.



2. ábra

A *2. ábrán* egy repülőgépszárny keresztmetszete látható a szárny körül áramló levegő áramvonalaival együtt, a szárnyhoz rögzített vonatkoztatási rendszerben. Tegyük fel, hogy

a) az áramlás tisztán kétdimenziós (azaz a levegő sebességvektorai a 2. ábra síkjában fekszenek);
b) az áramvonalkép független a repülőgép sebességétől;
c) szél nincs;
d) a dinamikus nyomás jóval kisebb a $p_0 = 1{,}0 \cdot 10^5$ Pa légköri nyomásnál.

(Használj vonalzót az ábrán végezhető mérésekhez!)

***i* (0,8 pont).** Ha a repülőgép sebessége a földhöz viszonyítva $v_0 = 100$ m/s, mekkora a levegő v_P sebessége a 2. ábrán jelzett P pontban a földhöz képest?

***ii* (1,2 pont).** Nagy relatív páratartalom esetén, ha a repülőgép sebessége a földhöz képest túllép egy kritikus $v_{\text{krit.}}$ értéket, a szárny mögött páracseppek sávja keletkezik. A cseppek egy jellemző Q pontban jelennek meg. Jelöld be a 2. ábrán a Q pontot! Magyarázd meg (lehetőleg képletekkel, a lehető legkevesebb szöveggel), hogyan határoztad meg ezt a pontot!

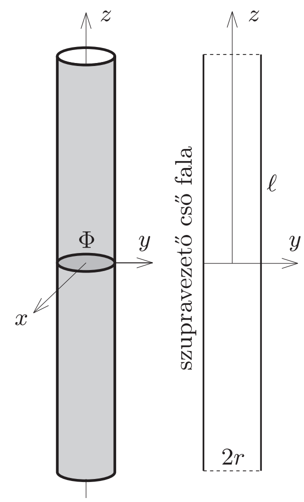
---

[1] A hivatalos megoldást és a mérési feladatokat a KöMaL novemberi számában ismertetjük. A feladatok kidolgozására 5 óra állt rendelkezésre.

[2] A feladatokra összesen 30 pontot lehetett kapni. A különböző pontértékek az egyes feladatok és részfeladatok nehézségi fokára utalnak.

***iii* (2,0 pont).** Becsüld meg a $v_{\text{krit.}}$ kritikus sebesség értékét a következő adatok felhasználásával: a levegő relatív páratartalma $r = 90\%$, a levegő állandó nyomáson mért fajhője $c_p = 1{,}00 \cdot 10^3$ J/(kg K), a telített vízgőz nyomása a meg nem zavart levegő $T_a = 293$ K hőmérsékletén $p_{sa} = 2{,}31$ kPa, $T_b = 294$ K hőmérsékleten pedig $p_{sb} = 2{,}46$ kPa. Az alkalmazott közelítésektől függően szükséged lehet a levegő állandó térfogaton mért $c_V = 0{,}717 \cdot 10^3$J/(kg K) fajhőjére is. A relatív páratartalom a gőznyomás és a telítési gőznyomás hányadosa egy adott hőmérsékleten. A telítési gőznyomás az a gőznyomás, ahol a gőz egyensúlyban van a folyadékkal.

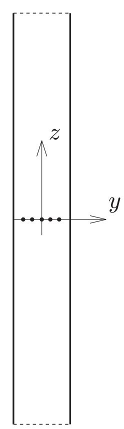
***C* rész. Mágneses csövek (4,5 pont).** Tekintsünk egy szupravezető anyagból készült hengeres csövet! A cső hossza ℓ, belső sugara r; $\ell \gg r$. Legyen a cső középpontja az origó, tengelye pedig a z tengely!



3. ábra

A cső középső keresztmetszetén ($z = 0$, $x^2 + y^2 < r^2$) Φ mágneses fluxus halad át. A szupravezető minden mágneses teret kizár magából (a szupravezető anyagban nincs mágneses tér.)

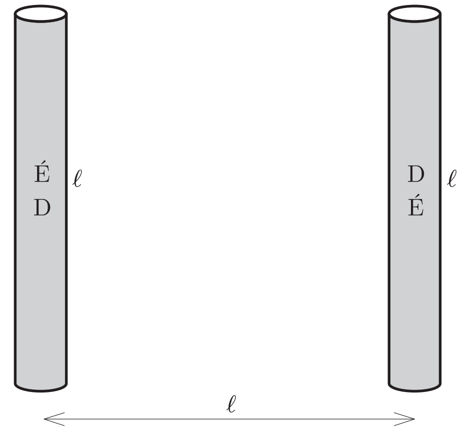
***i* (0,8 pont).** Vázold fel azt az öt mágneses indukcióvonalat, amelyek átmennek a *4. ábrán* bejelölt pontokon!



4. ábra. A szupravezető hengeres cső hossztengelyére illeszkedő keresztmetszete

***ii* (1,2 pont).** Határozd meg a cső közepén ébredő z irányú T erőt, amivel a cső $z > 0$ és $z < 0$ részei hatnak egymásra!

***iii* (2,5 pont).** Most tekintsünk még egy ugyanilyen csövet, amely párhuzamos az elsővel! A második csőben ellentétes irányú a mágneses mező, és a cső középpontja az $y = \ell$, $x = z = 0$ pontban helyezkedik el, azaz a csövek egy képzeletbeli négyzet szemközti oldalait alkotják (*5. ábra*). Határozd meg a csövek között ható F mágneses erőt!

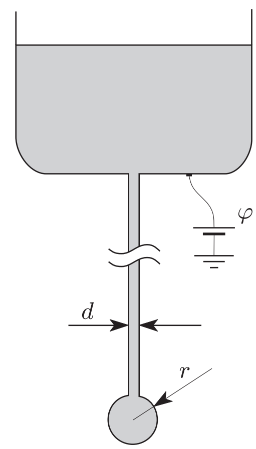


5. ábra

2. feladat. Kelvin csepegtetős gépe (8 pont).

A következő ismeretek hasznosak lehetnek: A folyadék felületét kevésbé kedvelik a részecskék, mint az anyag belsejét. Emiatt a határfelülethez $U = \sigma S$ felületi energia rendelhető, ahol S a határfelület területe és σ a folyadék felületi feszültsége. Továbbá a folyadékfelszín két darabkája $F = \sigma l$ erővel vonzza egymást, ahol l a darabkákat elválasztó egyenes határvonal hossza.

Egy víztartályhoz csatlakozó, d belső átmérőjű, hosszú fémcső függőlegesen lefelé áll; a cső alsó kimeneti nyílásából lassan víz csöpög ki (*6. ábra*). A vizet elektromosan vezetőnek tekinthetjük; a víz felületi feszültsége σ, sűrűsége ρ. A kimeneti nyílásról lelógó, gömbnek tekinthető vízcsepp sugara r. Mindvégig feltehetjük, hogy $d \ll r$. A vízcsepp nagyon lassan növekszik egészen addig, amíg a g nehézségi gyorsulás hatására le nem esik.



6. ábra

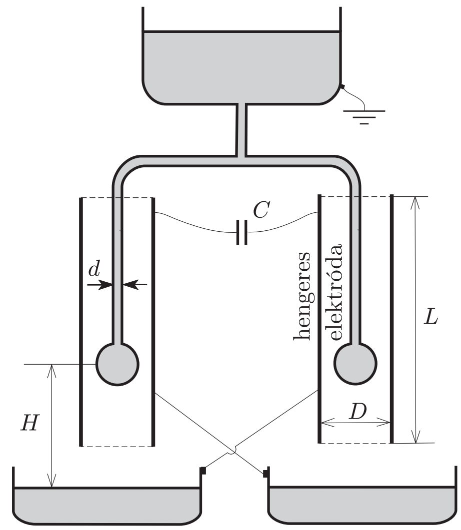
***A* rész. Egyetlen cső (4 pont).**

***i* (1,2 pont).** Add meg a vízcsepp $r_{\max}$ sugarát abban a pillanatban, amikor leszakad a cső kimeneti nyílásáról.

***ii* (1,2 pont).** A nagyon távoli környezethez képest a cső elektromos potenciálja φ. Határozd meg a csepp Q töltését, amikor a csepp sugara r.

***iii* (1,6 pont).** Ebben az alkérdésben a φ potenciál lassan növekszik, azonban tegyük fel, hogy a csepp r sugara állandó marad. A vízcsepp instabillá válik, és két darabra szakad szét, ha a vízcsepp belsejében a nyomás kisebbé válik, mint a külső légnyomás. Határozd meg azt a $\varphi_{\max}$ potenciált, amikor a szétszakadás bekövetkezik.

B* rész. Két cső (4 pont).** A két csőből álló berendezést „Kelvin csepegtetős gépének” nevezzük, melyben a két cső megegyezik az ***A részben leírtakkal. A két cső a *7. ábrán* látható T-elágazással kapcsolódik a víztartályhoz. Mindkét cső kimeneti nyílása egy-egy fémhenger-elektróda középpontjába esik. A hengerpalástok magassága L, átmérőjük D, $L \gg D \gg r$; mindkét cső esetén az időegységenként lecseppenő cseppek száma n. A cseppek H magasságból a kimeneti nyílások alatt elhelyezkedő, elektromosan vezető edényekbe esnek. Az edények az ábrán látható módon az átellenes henger-elektródákkal vannak elektromosan összekötve. A hengerelektródák közé C kapacitású kondenzátor van kapcsolva. A rendszer össztöltése kezdetben nulla. Az első leeső csepp mikroszkopikus töltéssel rendelkezik, amely felborítja a két oldal közötti egyensúlyt és kis töltésszétválást okoz a kondenzátoron. Vedd figyelembe, hogy a tartály földelt!



7. ábra

i **(1,2 pont).** Fejezd ki a lecseppenő cseppek Q_0 töltésének nagyságát akkor, amikor a kondenzátor töltése q. Megoldásodat fejezd ki az *A/i.* részben meghatározott $r_{\max}$ paraméter segítségével. Tekints el az *A/iii.* részben leírt effektustól!

ii **(1,5 pont).** Határozd meg a q töltést a t idő függvényében. Tekintsd a $q(t)$ függvényt folytonosnak, és tételezd fel, hogy $q(0) = q_0$.

iii **(1,3 pont).** A csepegtető működését az *A/iii.* részben leírt jelenség akadályozhatja. Az elérhető $U_{\max}$ határfeszültséget a csepp és az alatta lévő edény elektrosztatikus taszító hatása határozza meg. Határozd meg $U_{\max}$ értékét!

3. feladat. Csillagkezdemény kialakulása (9 pont).

Modellezzük a csillagok keletkezését a következőképpen. Egy gömb alakú csillagközi gázfelhő a saját gravitációja hatására összeroskad. A gázfelhő kezdeti sugara r_0, a tömege pedig m. A gázfelhő környezete a gázfelhőnél sokkal ritkább. A környezet és a gázfelhő kezdeti hőmérséklete mindenhol T_0. A gázt ideális gáznak tekinthetjük. A gáz átlagos moláris tömege μ, a fajhőhányados $\gamma > \dfrac{4}{3}$. Tételezzük fel, hogy

$$G\frac{m\mu}{r_0} \gg RT_0,$$

ahol R a gázállandó, G pedig a gravitációs állandó.

i **(0,8 pont).** Az összeroskadás jelentős részében a gáz annyira átlátszó, hogy a keletkező hő azonnal szétsugárzódik, azaz a gázfelhő termodinamikai egyensúlyban marad a környezetével. Miközben a sugár megfeleződik ($r_1 = 0{,}5\,r_0$), a nyomás n-szeresére változik. Határozd meg n értékét! Tételezd fel, hogy a gáz sűrűségeloszlása végig homogén marad!

ii **(2 pont).** Becsüld meg azt a t_2 időt, amely alatt a sugár az eredeti r_0 értékről $r_2 = 0{,}95\,r_0$ értékre csökken! Itt hanyagold el a gravitációs tér változását!

iii **(2,5 pont).** Tételezd fel, hogy a nyomás mindvégig elhanyagolható marad! Határozd meg az összeroskadás idejét, azt az időt, amíg a sugár a kezdeti r_0 értékről egy sokkal kisebb értekre csökken! Használd a Kepler-törvényeket!

iv **(1,7 pont).** Egy bizonyos $r_3 \ll r_0$ sugárnál a gáz annyira sűrűvé válik, hogy elnyeli a hőmérsékleti sugárzást. Számold ki a kisugárzott hőenergiát az összeroskadás kezdeti szakaszában, amikor a sugár r_0 értékről r_3 értékre csökken!

v **(1 pont).** Amikor a sugár kisebb, mint r_3, a hőmérsékleti sugárzást elhanyagolhatjuk. Határozd meg a gázgömb T hőmérsékletét az $r < r_3$ sugarának függvényében.

vi **(2 pont).** Az összeroskadás végén a nyomás hatását a gáz mozgására nem hanyagolhatjuk el, és az összeroskadás megáll $r = r_4$ sugárnál ($r_4 \ll r_3$). A sugárzást továbbra is hanyagoljuk el, és tegyük fel, hogy a hőmérséklet nem elég magas a magfúzió beindulásához. Egy ilyen csillagkezdeményben a nyomás már nem homogén, de egy szorzó erejéig durva közelítést adhatunk a keresett értékekre.

Adj *becslést* a végső r_4 sugárra és a hozzá tartozó T_4 hőmérsékletre!