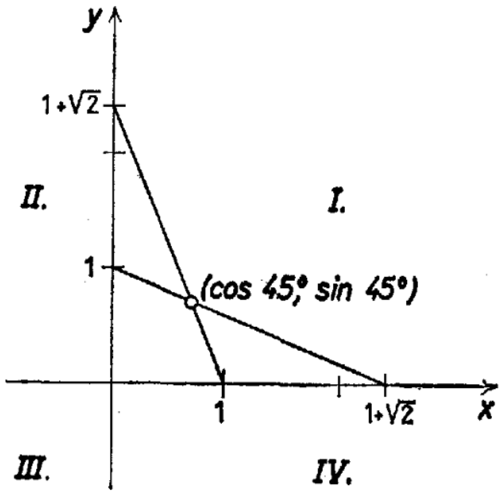
I. megoldás. Válasszuk úgy a koordináta-rendszert, hogy origója a nyolcszög centruma legyen és tengelyei annak átlói legyenek. Jelöljük az x, y tengelyek pozitív felén levő csúcsokat X-szel, Y-nal, az origót O-val, és válasszuk az OX szakasz hosszát egységnek (1. ábra). Írjuk fel először az X-ből az I. negyedbe induló nyolcszögoldal egyenletét.



1. ábra

Az X-szel szomszédos csúcs koordinátái $(\cos 45°; \sin 45°)$, így az oldal egyenesének az egyenlete

$$y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}(x-1),$$

amiből átrendezéssel a

$$\sqrt{2}x + (x+y) = \sqrt{2}+1 \tag{2}$$

egyenletet kapjuk. Az ugyancsak az I. negyedben levő, de Y-ból induló oldal egyenesének az egyenletét ebből x és y felcserélésével kapjuk, hiszen ez a két egyenes az $y = x$ egyenletű egyenesre nézve szimmetrikusan helyezkedik el. A mondott egyenlet tehát

$$\sqrt{2}y + (x+y) = \sqrt{2}+1. \tag{3}$$

Egy egyenletbe foglalhatjuk a két esetet, ha észrevesszük, hogy nekünk akkor van szükségünk (2)-re, amikor $x > y$, és (3)-ra, amikor $y > x$. Így a

$$\sqrt{2}\max(x,\, y) + (x+y) = \sqrt{2}+1 \tag{4}$$

egyenletet kapjuk, ahol $\max(x,\, y)$ az x, y számok nagyobbikát jelöli. Ez tehát a $(\cos 45°, \sin 45°)$ pontból induló, az X, illetve Y ponton átmenő félegyenesek egyesítésének az egyenlete. Nekünk azonban ennek csak az I. negyedbe eső darabja kell, a többi negyedben a megfelelő tengelyekre vonatkozó tükörképekre van szükségünk. Egy csapásra mindkét követelménynek eleget teszünk, ha x és y helyére azok abszolút értékét írjuk:

$$\sqrt{2}\max(|x|, |y|) + (|x|+|y|) = \sqrt{2}+1. \tag{5}$$

Ez már a nyolcszög egyenlete, de még nem (1) alakú. Vegyük még észre, hogy benne

$$2\max(|x|, |y|) = |x+y| + |x-y|,$$

hiszen akármilyen előjelű számokról van is szó, az összegük és különbségük abszolút értéke közül az egyik mindig az abszolút értékek összegével, a másik a nagyobbik és a kisebbik abszolút érték különbségével egyenlő:

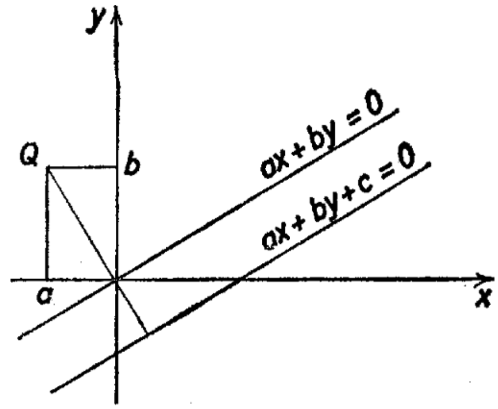
$$|x+y| + |x-y| = (|x|+|y|) + \max(|x|, |y|) - \min(|x|, |y|).$$

A kapott (5) egyenlet tehát ekvivalens az

$$|x+y| + |x-y| + |\sqrt{2}x| + |\sqrt{2}y| = 2+\sqrt{2}$$

egyenlettel, amiből $10/(2+\sqrt{2})$-vel való szorzással a keresett (1) alatti alakot kapjuk. Ekkor tehát $n = 4$.

II. megoldás.



2. ábra

Tetszőleges a, b, c mellett az

$$F(x,\, y) = ax + by + c$$

kétváltozós függvény értéke az

$$ax + by + c = 0$$

egyenletű e egyenes pontjaiban 0-val, az

$$ax + by + c = d$$

egyenletű egyenes pontjaiban d-vel egyenlő. Az $F(x,\, y)$ függvény értéke tehát az e-vel párhuzamos egyeneseken állandó, vagyis $F(x,\, y)$ értéke egy tetszőleges $P(x;\, y)$ pontban csak attól függ, hogy P az e-nek melyik oldalán van, és mennyi P és e távolsága. Az origón átmenő, e-re merőleges egyenes egyenlete

$$bx - ay = 0,$$

az ezen levő $Q(a;\, b)$ pontban $F(a,\, b) = a^2 + b^2 + c$, tehát $F(a,\, b) - F(0,\, 0) = a^2 + b^2$ (2. ábra). Mivel Q az origótól $\sqrt{a^2 + b^2}$ távolságra van, ez azt jelenti, hogy F abszolút értéke P és e távolságának $\sqrt{a^2 + b^2}$-szerese. Ezzel beláttuk, hogy a $P(x,\, y)$ távolsága az $a_i x + b_i y + c_i = 0$ egyenletű e_i egyenestől, amit $d_i(P)$-vel jelölünk

$$d_i(P) = \frac{|a_i x + b_i y + c_i|}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}.$$

A továbbiakban feltesszük, hogy $\sqrt{a_i^2 + b_i^2}$ értéke i-től függetlenül állandó, és jelöljük $10/d$-vel. Ezzel a megszorítással a feladatot a következő alakba írhatjuk át:

Keressünk a síkon n egyenest és egy d távolságot úgy, hogy azon P pontok mértani helye a síkban, melyekre az egyenesektől mért távolságösszeg éppen d, azaz melyekre

$$\sum_{i=1}^{n} d_i(P) = d,$$

egy szabályos nyolcszög pontjai.

a) Ha az e_1 és e_2 párhuzamos egyenesek távolsága t_{12}, akkor a sík tetszőleges P pontjára

$$d_1(P) + d_2(P) \geq t_{12},$$

és egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha a P pont a két egyenes valamelyikén, vagy a két egyenes között helyezkedik el. Így ha e_1 és e_2; e_3 és e_4; e_5 és e_6, valamint e_7 és e_8 egyenesek (páronként) párhuzamosak, távolságuk pedig rendre t_{12}, t_{34}, t_{56} és t_{78}, akkor

$$\sum_{i=1}^{8} d_i(P) \geq t_{12} + t_{34} + t_{56} + t_{78},$$

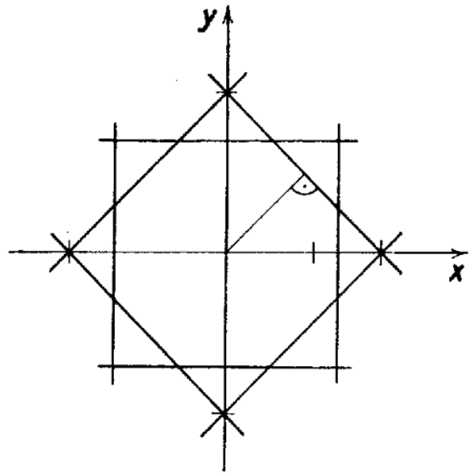
és egyenlőség csak akkor áll, ha a P pont mind a négy párhuzamos egyenespár között (a határokat is beleértve) helyezkedik el. Ez azt jelenti, hogy ha e_1 és e_2; e_3 és e_4 stb. egy szabályos nyolcszög szemben levő oldalegyenesei, akkor $t_{12} = t_{34} = t_{56} = t_{78}$, és a

$$\sum_{i=1}^{8} d_i(P) = 4t_{12} = d$$

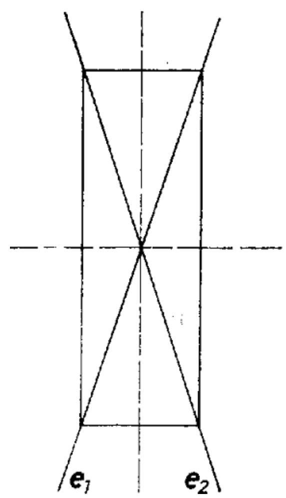
összefüggés csak a nyolcszög belső- és határpontjaira teljesül. Például ha a nyolcszög oldalegyenesei a 3. ábrán látható egyenesek, akkor

$$\left|x+\frac{5}{4}\right|+\left|x-\frac{5}{4}\right|+\left|y+\frac{5}{4}\right|+\left|y-\frac{5}{4}\right|+\left|\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}+\frac{5}{4}\right|+\left|\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{5}{4}\right|+$$
$$+\left|\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{y}{\sqrt{2}}+\frac{5}{4}\right|+\left|\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{5}{4}\right|=10$$

feltételeknek eleget tevő $(x,\, y)$ számpárok a nyolcszög belső és határpontjait adják.



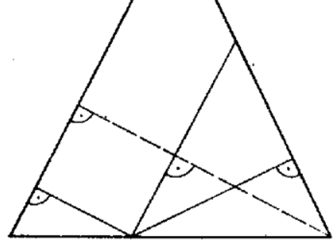
3. ábra



4. ábra

b) Ha az e_1 és e_2 egyenesek az O pontban metszik egymást, akkor azon P pontok mértani helye, melyekre $d_1(P)+d_2(P)=t$ (adott szakasz), egy téglalap (4. ábra), melynek oldalai párhuzamosak a két egyenes szögfelezőivel. Ez az állítás azonnal következik abból az ismert tételből, hogy egyenlő szárú háromszög alapján levő tetszőleges pontnak a száraktól mért távolságainak összege állandó (5. ábra).

$$\sum_{i=1}^{8} d_i(P) \geq t_{12}+t_{34}+t_{56}+t_{78},$$



5. ábra

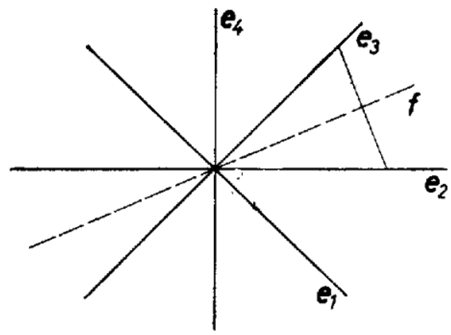
Ennek alapján ha e_1, e_2, e_3 és e_4 egymásból pozitív irányú $45°$-os elforgatással kapható, akkor azon P pontok, amelyekre

$$\sum_{i=1}^{4} d_i(P) = d \tag{6}$$

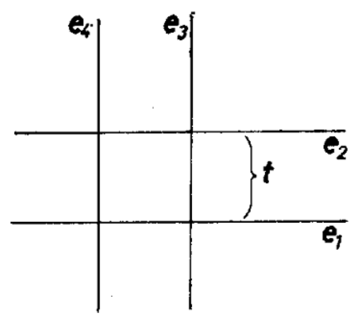
teljesül, és az e_2 és e_3 egyenesek közti kisebbik szögtartományban vannak (6. ábra), két, egymással szimmetrikus helyzetű, az f szögfelezőre merőleges szakaszon helyezkednek el, hiszen f az e_1 és e_4 szögfelezője is. Így a (6) feltételt kielégítő pontok szabályos nyolcszög határpontjait alkotják. A mondottak alapján a

$$\left|\sqrt{2}x\right| + \left|\sqrt{2}y\right| + |x+y| + |x-y| = 10$$

feltételt egy szabályos nyolcszög határpontjai elégítik ki.



6. ábra



7. ábra

Hasonló meggondolás mutatja, hogy például egy t oldalú négyzet oldalegyeneseitől mért $d = (2+\sqrt{2})t$ távolságösszegű pontok is szabályos nyolcszög határpontjait határozzák meg (7. ábra), ami az $\alpha = \frac{5}{2}\left(2-\sqrt{2}\right)$ jelöléssel az

$$|x+\alpha| + |x-\alpha| + |y+\alpha| + |x-\alpha| = 10$$

feltételt adja. Ezeken kívül a feladatnak sok más megoldása lehetséges.

Gerencsér Gyula (Zalaegerszeg, Ságvári E. Gimn., III. o. t.)
dolgozata alapján