Matematika és fizika totó megoldása[1]

A telitalálatos szelvény

$$3, 3, 1, \quad 3, 1, 0 \quad 1, 2, 1, \quad 0, 3, 2 \quad 2, 0$$

lett volna. Ilyen (vagy ezt megközelítő) szelvény nem volt. A legeredményesebbek 10 *találatot értek el, ők könyvjutalmat kaptak. Az alábbiakban rövid útmutatást adunk a feladatok megoldásához.*

1. $2^{\cos^2 x} \geq 1 \geq |\sin x|$, így csak az egyenlőség állhat fenn, tehát

$$2^{\cos^2 x} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \cos^2 x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \cos x = 0,$$

és

$$1 = |\sin x| \quad \Longrightarrow \quad \sin x = 1 \quad \text{vagy} \quad \sin x = -1.$$

A $[0,\, 2\pi]$ intervallumon mindkét feltétel teljesül, ha $x_1 = \dfrac{\pi}{2}$ vagy $x_2 = \dfrac{3\pi}{2}$, tehát két megoldás van.

2. A fotonnak valamennyi (töltés jellegű) jellemzője (amelyek a részecske $\leftrightarrow$ antirészecske cserénél előjelet váltana) *nulla,* emiatt a foton antirészecskéje maga a foton.

3. $93^{600} = (7 \cdot 13 + 2)^{600}$. A két tag összegének hatványában a binomiális tétel szerint csak az utolsó tagban nem szerepel 13, így ugyanannyi maradékot ad 13-mal osztva, mint 2^{600}. Megvizsgálva 2^k 13-mal osztva kapott maradékait kiderül, hogy 12-es ciklusban ismétlődnek és a 12. maradék éppen 1 lesz. $600 = 50 \cdot 12$, így 2^{600}-nál is 1 lesz a maradék.

4. Vizsgáljunk 360-as ciklusokat 5 perces kávészünettel. Egy ilyen ciklus $360 : 24 - 1 = 14$ szellőztetést tartalmaz, mert az utolsó szellőztetés helyett kávészünet van. A ciklus hossza: $\dfrac{360 \cdot 20}{60} + 14 \cdot 1{,}5 + 5 = 146$ perc. Ilyen ciklusból a 480 perces munkaidőben csak 3 lehet és az egyikben 5 perc helyett 37 perccel hosszabb ebédszünet van, valamint az utolsó ciklus végén nincs 5 perces kávészünet, mert 2 óránál már kevesebb van hátra a munkaidőből. A 3 ciklus összes ideje így $3 \cdot 146 + 37 - 5 = 470$ perc, és marad még 10 perc a munkaidőből.

Az adott arányok miatt minden 12 műköröm felhelyezés 3 vendéget jelent. Ez egy ciklusban 90, a háromban pedig 270 vendéget jelent. A maradék 10 percben az adott arányok miatt még 24 műkörmöt tehet fel, ami 6 vendéget jelent. Tehát összesen 276 vendéget szolgált ki.

5. A lufi mozgása a levegő sűrűségének térben gömbszimmetrikus, időben periodikus ingadozását eredményezi, ún. gömbhullámban terjedő hangot kelt. Ugyanez elektromágneses hullámoknál nem lehetséges, mert azok a terjedési irányra merőlegesen valamerre polarizáltak kellene legyenek, de gömbszimmetrikus forrásnál nincs ilyen kitüntetett irány (a fény „nem tudja eldönteni”, hogy merre mutasson a polarizációja). A gravitációs hullámok is rendelkeznek polarizációval; ez azonban nem egy irányvektorral, hanem egy gömb kicsiny belapultságával szemléltethető. Gömbszimmetrikus forrás ilyen hullámot nem képes kelteni.

6. Az 1, 2, 3 számjegyekből képezhető n-jegyű számok száma 3^n. A pontosan egy számjegyet tartalmazó számok száma nyilván 3. Olyan szám, amely pontosan kétféle számjegyet tartalmaz, $3 \cdot (2^n - 2)$ van, mert két számjegyből 2^n szám képezhető, de a csupán egyféle számjegyből állók nem megfelelők. A feladatunkat kielégítő számok száma tehát

$$3^n - 3 \cdot (2^n - 2) - 3 = 3\big(3^{n-1} - 2^n + 1\big).$$

7. Egy kezdősebesség nélkül induló, szabadon eső porszem $s = 10^{-6}$ m utat $t = \sqrt{2s/g}$ idő alatt tesz meg, és eközben a sebessége $\sqrt{2sg}$ nagyságú lesz (ahol g a „holdbéli” nehézségi gyorsulás).

A második porszem sebessége minden pillanatban $\Delta v = \sqrt{2sg}$ értékkel kisebb lesz, mint a korábban indulóé, a két porszem tehát egyenletesen távolodik egymástól. A $H = 300$ m magas szikláról az első porszem $T = \sqrt{2H/g}$ ideig esik, a porszemek eltávolodása tehát

$$d = (T - t)\Delta v = \left(\sqrt{\frac{2H}{g}} - \sqrt{\frac{2s}{g}}\right)\sqrt{2sg} = 2\big(\sqrt{sH} - s\big) \approx 2\sqrt{sH} \approx 34{,}6 \text{ mm}.$$

8. Megmutatjuk, hogy egész szám négyzetének utolsó jegye minden olyan esetben 6, amikor a tízesek helyén páratlan szám áll.

Legyen az a szám utolsó jegye c. Ekkor $a + c$ páros, $a - c$ pedig 10-zel osztható. Ezért $a^2 - c^2 = (a + c)(a - c)$ osztható 20-szal, tehát a^2 és c^2 utolsó jegye azonos, a tízesek helyén álló jegy pedig vagy mindkettőben páros, vagy mindkettőben páratlan.

Az egyjegyű számok négyzetében a tízes jegy $4^2 = 16$ és $6^2 = 36$ esetében páratlan, s az utolsó jegy ezekben 6. Ebből következik tehát, hogy a^2 tízes jegye csak akkor páratlan, ha a 4-re vagy 6-ra végződik, s hogy a^2 utolsó jegye minden ilyen esetben 6.

[1] A kérdések a 48. oldalon találhatók

A feladat követeléseinek megfelelő számok valóban léteznek, pl. $24^2 = 576$, $26^2 = 676$.

9. $n = 1$ dimenzióban (pl. egy megfeszített gumikötél mentén) elvben torzulásmentesen terjedhetnek hullámok, emiatt a rövid ideig működő hullámforrások jelei távolabb „pukkanásként" érzékelhetők. Ugyanez igaz 3 dimenzióban is (pl. egy távoli szupernova-robbanás a Földről nézve is rövid idejű fényfelvillanás).

Más a helyzet $n = 2$ dimenzióban: a síkban terjedő hullámok még akkor is hosszú „utózengést" mutatnak, amikor a kiinduló jel nagyon rövid „durranás". A hullámokat leíró (és formálisan akárhány dimenzióban felírható) differenciálegyenlet megoldása szerint minden páros n-nél fellép ilyen utózengés.

10. Keressük az x, y, z és a pozitív egész számokat úgy, hogy $x < y < z$ és $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = a$ legyen. Nyilvánvaló, hogy

$$a = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2.$$

Innen $a = 1$, amiből

$$\frac{1}{x} < a = 1 < \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{3}{x}.$$

Tehát $1 < x < 3$, és így $x = 2$. Ebből $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$, ennélfogva $\frac{1}{y} < \frac{1}{2} < \frac{2}{y}$. Tehát $2 < y < 4$, és így $y = 3$. Végül az $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{z} = 1$ egyenletből $z = 6$. A feladat egyetlen megoldása: $x = 2$, $y = 3$, $z = 6$, $a = 1$.

11. A Nap egészének (sugárzási) teljesítménye *nagyságrendileg* 10^{23} kW, tömege 10^{30} kg, átlagsűrűsége pedig kb. a víz sűrűségével megegyező. Ezeket az adatokat földi mérésekből (a napállandóból, a csillagászati egységből, a Föld keringési idejéből és a Nap látószögéből) ismerjük. Ezekből kiszámítható, hogy 1 liternyi napanyagra 10^{-7} kW teljesítmény jut, vagyis tízmilliószor (!) kisebb, mint a szokásos konyhai vízmelegítőké. Ilyen kis teljesítmény mellett a vízforraláshoz szükséges idő száz év nagyágrendű lenne (és az edény „ideális" hőszigetelése is ennek megfelelő kellene legyen).

12. A hullámhegyek haladási sebessége a hullám fázissebessége, ez nagyobb is lehet, mint a vákuumbeli fénysebesség. A hullámcsomag „egészének" sebessége – általában – nem léphet túl a fénysebességet, de a hullámvonulat legmagasabb pontja megteheti ezt! (Egy országúti kerékpárversenyen is előfordulhat, hogy a hosszan elnyúló „mezőny" legmagasabb versenyzője sokáig hátul kerekezik, de amikor a sor elején valaki feláll a kerékpárján, akkor az éppen legmagasabb versenyző helye hirtelen előreugrik, és az ugrás sebessége tetszőlegesen nagy lehet.)

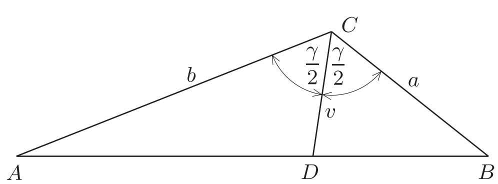
13. Jelentse $v = CD$ egy tetszőleges ABC háromszögben a C-n levő γ szög felező egyenesét. A háromszög területe egyenlő a részek területeinek összegével, tehát

$$ab \sin\gamma = av \sin\frac{\gamma}{2} + bv \sin\frac{\gamma}{2}, \quad \text{azaz} \quad 2ab \sin\frac{\gamma}{2} \cos\frac{\gamma}{2} = v(a+b) \sin\frac{\gamma}{2}.$$

Innen

$$\frac{1}{v} \cos\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

A $\gamma = 120°$ esetben



$$\cos\frac{\gamma}{2} = \cos 60° = \frac{1}{2}, \quad \text{tehát} \quad \frac{1}{v} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad \text{azaz} \quad v = \frac{ab}{a+b}.$$

13+1. A víz és a levegő határa konstans átlaggörbületű, a falhoz 90°-ban illeszkedő felület kell legyen. Ez akár nyeregfelület is lehet (lásd a KöMaL 2011. évi novemberi számának hátsó, belső borítóján közölt fényképeket).