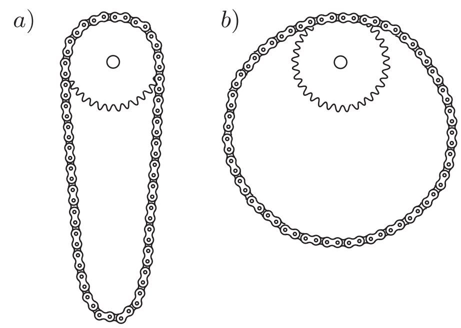
2010. október 15-én délután 3 órai kezdettel rendezte meg az Eötvös Loránd Fizikai Társulat a háború utáni 62. Eötvös-versenyét. Budapesten 30, vidéken 52 dolgozatot adtak be a versenyzők, akik között 1–1 román, szlovák, illetve ukrán állampolgár is volt. Utóbbiak az ELTE, illetve a BME elsőéves hallgatóiként indultak a versenyen.

A feladatokat az Eötvös-versenybizottság tűzte ki (tagjai *Honyek Gyula, Károlyházy Frigyes, Vigh Máté,* elnök *Radnai Gyula*) és a versenyzők dolgozatait is ugyanez a bizottság értékelte. A három kitűzött feladat megoldására hagyományosan 300 perc állt rendelkezésre.

Ismertetjük a feladatokat és azok megoldását.

1. feladat. *Egy fogaskerék tengelyét vízszintesen rögzítjük és ráhelyezünk egy kerékpárláncot az* 1/*a*) ábrán *látható módon, majd a fogaskereket a tengelye körül óvatosan forgatni kezdjük. Milyen alakot vesz fel a lánc, amikor a fogaskerék már állandó szögsebességgel sebesen forog?*



1. ábra

Marci szerint a lánc alakja és helyzete ugyanolyan marad, mint volt, csupán annyi a változás, hogy a láncszemek körbeszáguldanak az eredeti alak mentén. Karcsi ezt nem hiszi, szerinte a lánc a forgás következtében kikerekedik, és közelítőleg kör alakú lesz a 1/*b*) ábra *szerint. Marcinak vagy Karcsinak van igaza? (Bizonyítsuk be az egyik állítást, vagy legalább mutassuk meg, hogy a másik állítás nem lehet igaz!)*

(*Vigh Máté*)

Megoldás (Vigh Máté): Tekintsük az álló láncot földi nehézségi erőtérben! Ebben az esetben a (minden pontban érintő irányú) feszítőerő a lánc mentén folyamatosan változik, éppen oly módon, hogy minden láncszem súlyát a szomszédai által kifejtett két erő eredője kiegyensúlyozza. Jelöljük ezt a feszítőerőt a lánc egy tetszőleges (mondjuk legfelső) pontjától mért s ívhossz függvényében $F_1(s)$-sel! (Természetesen $F_1(0) = F_1(\ell)$, ahol ℓ a lánc teljes hossza.)

Tekintsünk most egy ugyanilyen alakú láncot, amit a súlytalanság állapotában (mondjuk egy űrállomáson) megpörgetünk úgy, hogy minden láncszem azonos, érintő irányú v sebességgel mozogjon! A lánc kis darabkájára felírva a dinamika alapegyenletét könnyen belátható, hogy ekkor a láncot feszítő $F_2(s)$ erő nagysága független a lánc adott pontbeli görbületi sugarától, sőt, még az ívhossztól is, és nagysága $F_2 = \varrho v^2$, ahol ϱ a lánc egységnyi hosszú darabjának tömege. Akármilyen alakú is tehát a lánc, ez a (térben és időben állandó) feszítőerő minden egyes láncszemre éppen a centripetális gyorsulásához szükséges (a lánc mentén a görbületi viszonyoktól függően helyről helyre változó) eredő erőt képes biztosítani.

Végül tekintsük a feladatunkban szereplő, a földi nehézségi erőtérben mozgó, az eredetivel azonos alakú láncot! Ha a feszítőerő a lánc mentén $F_1(s) + F_2$ módon változik, akkor minden láncszemre teljesül a Newton-féle mozgásegyenlet, hiszen az $F_1(s)$-ből adódó eredő erő és a gravitációs erő összege nulla, az F_2-ből jövő járulék pedig a tömeg és a centripetális gyorsulás szorzatát adja.

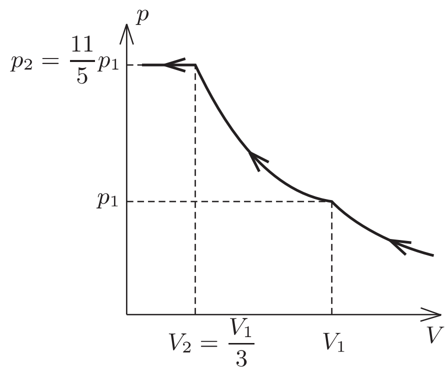
Ezzel beláttuk, hogy az eredeti láncgörbe lehet a mozgó lánc alakja is, tehát *Marcinak van igaza.* (Az érvelésből az is látszik, hogy egy kikerekedett láncalaknál nem teljesülhetnek a Newton-egyenletek az egyes láncszemekre, ezért a mozgó lánc *nem lehet* kör alakú.)

Megjegyzések: 1. A fenti érvelést szemléltethetjük a következő gondolatkísérlettel: A fogaskerék álló állapotában varázsütésre „kapcsoljuk ki” a földi nehézségi erőteret! A lánc alakja ettől nem változik meg, csupán nem nyomja tovább a fogaskereket. Ahogy azt korábban beláttuk, ha ezután minden láncszemnek ugyanakkora, érintő irányú sebességet adunk, a lánc továbbra is megőrzi eredeti alakját. Végül kapcsoljuk vissza a földi gravitációt, amely (mint tudjuk) a megőrzött alakot már nem szeretné deformálni, tehát a mozgó lánc alakja a stacionárius helyzetben ugyanaz lesz, mint a kiindulási, nyugalmi állapotban.

2. Belátható, hogy ha láncszemek kiterjedését is figyelembe vesszük, arra az eredményre jutunk, hogy a fogaskerék egyre növekvő fordulatszáma esetén a lánc alakja fokozatosan eltér az eredeti alaktól, valóban elkezd kikerekedni. Életszerű adatokkal számolva azonban a lánc kikerekedéséhez szükséges fordulatszámra irreálisan nagy érték adódik, így valószínű, hogy a kerékpárlánc előbb szakad el, minthogy ez az effektus észrevehetővé válna.

3. Ahogy azt az egyik versenyző a dolgozatában leírta, a megoldáshoz felsőbb matematikai ismeretekkel és a klasszikus mechanika egyik alappillérének, a Hamilton-féle legkisebb hatás elvének a stacionárius mozgásokra való alkalmazásával is eljuthatunk. Kiemelendő azonban, hogy ilyen, a középiskolai ismereteken messze túlmenő számítások nélkül is el lehetett jutni a helyes megoldáshoz.

2. feladat. *Egy dugattyúval ellátott tartályban* $T = 77{,}4$ K *hőmérsékletű nitrogén- és oxigéngáz keveréke található. A hőmérsékletet állandó értéken tartva a gázelegyet lassan összenyomjuk. A keverék nyomása a* 2. ábrán *látható módon változik a térfogat függvényében, ahol* $V_1 = 15\ \mathrm{dm}^3$ *és* $p_1 = 56{,}3$ kPa.



2. ábra

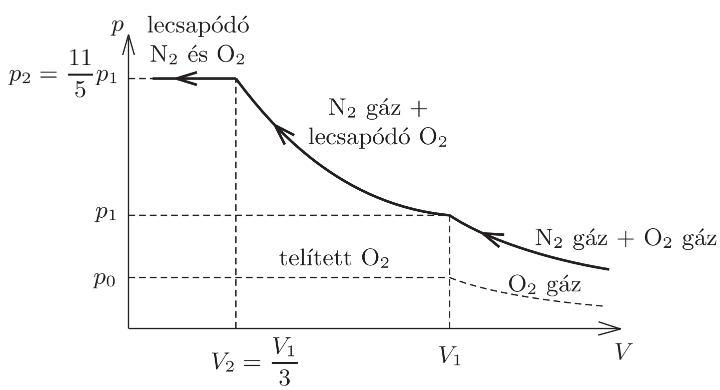
a) Milyen fizikai jelenségek rejlenek az izotermán látható furcsa töréspontok mögött?
b) Mennyi nitrogén és mennyi oxigén van a tartályban?

(*Honyek Gyula*)

Megoldás. *a*) A (p_2, V_2) állapotnál az izoterma törése ismerős: azt jelzi, hogy a gáz cseppfolyósodni kezd, ezért nem nő tovább a nyomása. De mi történt a (p_1, V_1) állapotban? Miért változott meg itt az izoterma meredeksége? Figyeljünk fel arra, hogy a tartályban kétféle gáz keveréke található. Elképzelhető, hogy ezek nem egyszerre kezdenek cseppfolyósodni, hanem itt, a (p_1, V_1) állapotban csak az egyik komponens kezd lecsapódni, a másik pedig még gáz halmazállapotú marad!

Vagyis összenyomás közben V_1 és V_2 között az egyik komponens nyomása már nem változik, a másiké pedig tovább nő. Ez a második komponens akkor kezd lecsapódni, amikor a tartály térfogata már V_2-re csökkent. Ez a válasz az *a*) kérdésre. Hogy melyik gáz kezd hamarabb cseppfolyósodni, arra még csak tippelhetünk. Tételezzük fel, hogy ez az oxigén.

b) Az *a*) kérdésre adott válasz alapján ábrázoltuk a folyamatot a (p, V) diagramon (*3. ábra*).



3. ábra

A megadott adatokkal ($p_1 = 56{,}3$ kPa és $V_1 = 15\ \mathrm{dm}^3$)

$$p_2 = \frac{11}{5}p_1 = 123{,}9\ \mathrm{kPa} \qquad \text{és} \qquad V_2 = \frac{V_1}{3} = 5\ \mathrm{dm}^3.$$

Az oxigén egyelőre ismeretlen p_0 telítési nyomását abból számíthatjuk ki, hogy a nitrogén még a $V_1 \to V_2$ összenyomás közben is gáz maradt. Elhanyagolva a cseppfolyós oxigén térfogatát a tartályban, valamint a nitrogéngázt továbbra is ideális gáznak tekintve felírhatjuk rá a Boyle–Mariotte-törvényt:

$$(p_1 - p_0)V_1 = (p_2 - p_0)V_2.$$

Ebből az oxigén telítési nyomása $p_0 = \dfrac{2}{5}p_1 = 22{,}5$ kPa.

Ennek segítségével felírhatjuk a nitrogén és az oxigén mólokban mért tömegének arányát:

$$\frac{n_{\text{nitrogén}}}{n_{\text{oxigén}}} = \frac{p_1 - p_0}{p_0} = \frac{3}{2}.$$

Már csak egy összefüggés hiányzik a két mólszám között ahhoz, hogy kiszámíthassuk pontos értékeiket. Ez a keresett összefüggés abból adódik, hogy a két mólszám összege a mólokban mért teljes anyagmennyiség, amely kezdetben még (ideális) gáz volt, tehát érvényes rá az ideális gáz állapotegyenlete:

$$p_1 V_1 = n_{\text{összes}} RT.$$

Ebből $n_{\text{összes}}$ $(= n_{\text{nitrogén}} + n_{\text{oxigén}}) = 1{,}313$ mól. Fentiek alapján, felhasználva a moláris tömegek értékét:

$$n_{\text{nitrogén}} = 0{,}788 \text{ mól} = 22{,}1 \text{ gramm},$$
$$n_{\text{oxigén}} = 0{,}525 \text{ mól} = 16{,}8 \text{ gramm}.$$

Kizárólag a feladatban szereplő adatok segítségével nem lehet eldönteni, hogy az oxigén vagy a nitrogén kezd el hamarabb cseppfolyósodni.

Szöget üthet a fejünkben, hogy miért éppen a $T = 77{,}4$ K-es izotermát kérdezi a feladat. Eszünkbe juthat (táblázatok alapján ellenőrizhetjük), hogy ez a hőmérséklet a folyékony nitrogén forráspontja normál légköri nyomáson ($1 \text{ atm} = 1{,}013 \cdot 10^5$ Pa). Ez azt jelenti, hogy a nitrogén ezen a hőmérsékleten akkor kezd el cseppfolyósodni, ha a parciális nyomása eléri az 1 atmoszférát. A kezdőállapotban $p_1 = 56{,}3$ kPa, vagyis ezen a nyomáson a nitrogén akkor sem kezdhetne el kondenzálódni, ha a gáz tiszta nitrogén lenne.

Érvelésünket úgy is megerősíthetjük, ha kiszámítjuk a $p_2 - p_0$ nyomás értéket, mert ennek a különbségnek éppen 1 atmoszférának kell lenni, hiszen ez a telített nitrogéngőz nyomása 77,4 K-en. Ha a számításokat kerekítések nélkül végezzük, akkor $p_2 = 123{,}86$ kPa és $p_0 = 22{,}52$ kPa, vagyis a különbség 101,34 kPa, ami nagy pontossággal 1 atmoszféra.

Következtetésünket az is megerősíti, hogy a normál nyomású oxigén forráspontja (szintén táblázatokban megtalálható adat) 90,2 K, amiből az következik, hogy a telített oxigéngőz nyomása 77,4 K-en kisebb, mint a nitrogéné (1 atmoszféra), és valóban a megoldás részeredményeit felhasználva:

$$p_0 = \frac{2}{5} p_1 < p_2 - p_0 = \frac{9}{5} p_1.$$

A feladatban azért jelennek meg ezek az egyszerű törtek, mert véletlenül a telített nitrogén nyomása (1 atm) éppen négy és félszerese a telített oxigén nyomásának 77,4 K-en.

Kiegészítés (Honyek Gyula): Érdekességként említhetjük meg, hogy amennyiben észrevesszük, hogy a telített nitrogéngőz nyomása 77,4 K-en 1 atm, akkor a következő egyenleteket írhatjuk fel:

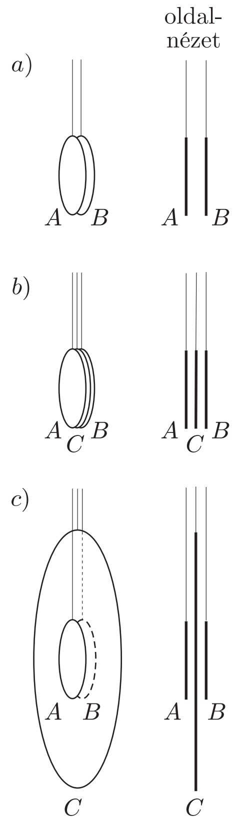
$$\frac{11}{5} p_1 - p_0 = 1 \text{ atm.} \quad \text{és} \quad \mathrm{p}_1 - \mathrm{p}_0 = \frac{1}{3} \text{ atm.}$$

Ezeknek az egyenleteknek a megoldása:

$$p_0 = \frac{2}{9} \text{ atm.} = 22{,}5 \text{ kPa} \quad \text{és} \quad \mathrm{p}_1 = \frac{5}{9} \text{ atm.} = 56{,}3 \text{ kPa},$$

vagyis azok számára, akik kihasználták, hogy normál légköri nyomáson a nitrogén forráspontja 77,4 K, a megadott $p_1 = 56{,}3$ kPa adat felesleges volt.

3. feladat. *Két egyforma, mondjuk* 5 cm *átmérőjű, vékony lemezből készült fémkorong (A és B) szigetelő fonálon függ pontosan egymással szemben, párhuzamosan, egymáshoz közel, pl.* 2 mm *távolságban, az a*) ábrán *látható módon. Mindkét korongnak ugyanakkora, kellőképpen kicsiny q elektromos töltést adunk. (Mivel q kicsi, sem a korongok parányi elmozdulása, sem a levegőn át történő kisülések veszélye nem okoz bonyodalmat.) Kezdetben természetesen mindkét korongra hat a másik korong taszító ereje.*



4. ábra

Fizika szakkörön az elektromos árnyékolás a téma.

A két korongot nézve Beának az az ötlete támad, hogy ha az A és B korong közé óvatosan (ügyelve, hogy egyikhez se érjen hozzá) egy ugyanolyan, de elektromosan semleges C fémkorongot eresztünk be szigetelő fonálon a b) *ábrának megfelelően, akkor az „leárnyékolja” mindkét eredeti korongnak a másikra gyakorolt hatását, ezért mind az A-ra, mind a B-re ható erő gyakorlatilag nullára csökken.*

Gabi figyelmeztet rá, hogy az elektromos mező nagyobb tartományra terjedhet ki, mint a töltött testek mérete, ezért Bea ötletét úgy módosítja, hogy a C korong átmérője legyen pl. 25 cm, *ahogy a* c) *ábrán látható. (Az ábra nem méretarányos.) Gabi szerint csak ekkor csökken elhanyagolható értékre az A-ra, illetve B-re ható elektromos erő.*

a) Mit tapasztalnánk, ha Bea ötletét követve A és B közé velük egyenlő méretű, semleges C fémkorongot engednénk, majd megmérnénk az A-ra, illetve B-re ható erőt?

b) Mi lenne az eredmény, ha Gabi javaslatát ellenőriznénk méréssel?

c) Elképzelhető-e olyan méretű semleges C korong, amelynek alkalmazásával az A-ra, illetve a B-re ható erő pontosan zérussá válik?

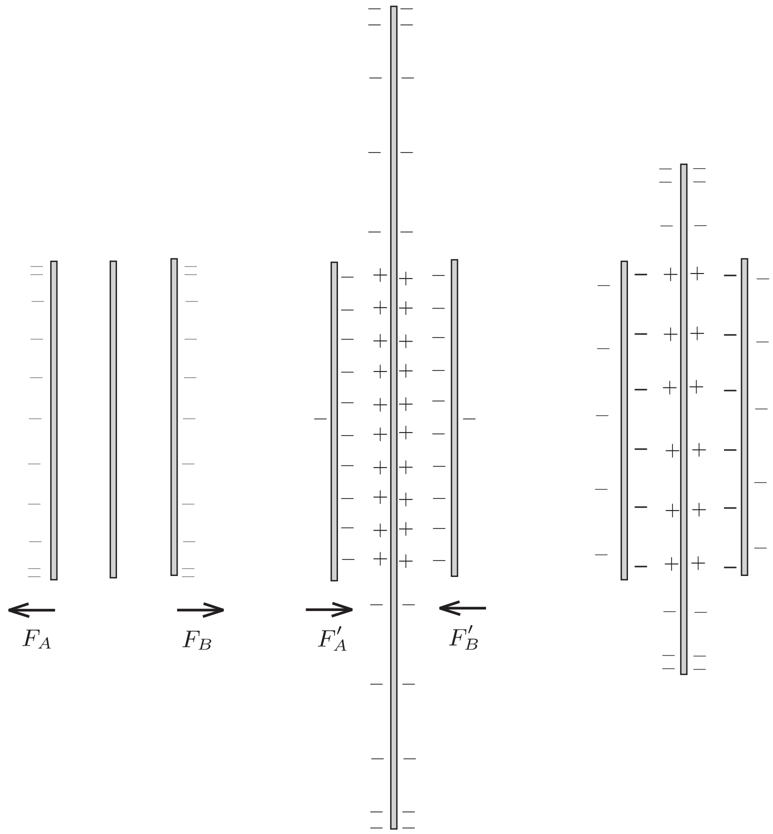
(*Károlyházy Frigyes*)

Megoldás. *a*) A középre leengedett fémkorongon nem alakulhat ki töltésmegosztás, mert a korong (fém!) belsejében nem lehet szabad töltés, felületén pedig nem léphet fel kétféle előjelű töltés a szimmetrikusan, ugyanakkora korongokon elhelyezkedő, azonos előjelű töltések hatására. Ezért Bea ötlete nem jó, a két feltöltött korongra ható erő *nem* változhat meg. Ugyanúgy *taszítanák* egymást a semleges C fémkorong leeresztése után, mint addig.

b) Itt, a nagyméretű C korong esetén már érvényesülhet a töltésmegosztás. A középső korongnak a másik két koronggal szemközti részein q-val ellentétes töltés alakul ki mindkét oldalon. Ugyanakkora, q-val azonos előjelű töltés lép fel a nagy C korong széle felé, úgyhogy az össztöltés továbbra is nulla marad. Viszont a töltött korongokra most a nagy korongon megosztott (influált), q-val ellentétes előjelű töltések *vonzó* erőt fejtenek ki, és ez nagyobb, mint a taszító erő. A két töltött korongra ható erő éppen ellentétes irányú lesz, mint addig, amíg nem volt közöttük a nagy korong.

c) Gondolatban fokozatosan növeljük a középső korong átmérőjét 5 cm-ről 25 cm-re. A kezdeti taszító erő csökkenni kezd, míg végül – folytonosan változva – vonzó erőbe megy át. Közben, valamekkora átmérőnél tehát éppen zérus a töltött korongokra ható erő. Hogy ez mekkora átmérőnél következik be, azt egy kicsit bonyolultabb számítással lehet csak meghatározni; ezt azonban nem várta el a versenybizottság a megoldóktól[1].

[1] A „kritikus” korongméret középiskolás eszközökkel történő kiszámítására a KöMaL egy későbbi számában még visszatérünk. – *A Szerk.*



a) *b*) *c*)

5. ábra

Tájékozódásul vázoljuk a három esetben kialakuló tölteseloszlást (*5. ábra*), feltéve, hogy eredetileg negatív töltést adtunk a korongoknak. (Az ábrák *nem* méretarányosak.)

Kiegészítések (Kalina Kende ötlete alapján): *a*) eset: Vegyük a három korong burkolóhengerét. Képzeljük azt, hogy ez a „lapos" henger teljes egészében homogén vezető. Vigyünk fel rá $2q$ töltést, ezek legnagyobb része henger véglapjain jelenik meg, csak egy kis része kerül a henger palástjára. Ha ezután eltávolítjuk a hengernek azt a részét, ami nem a három korong, akkor látszik, hogy a középső korongon nincs töltés, így nem befolyásolja az A és B korong közötti erőhatást.

b) eset: Ha a középső korong végtelen nagy lenne, akkor a tükörtöltés módszerét alkalmazva jól látszana, hogy A-ra és B-re is vonzóerőt fejt ki a középső fémsík, miközben az A és B közötti kölcsönhatás már nem is lép fel. Most ugyan nem végtelen nagy a középső korong, de területe a kis, töltött A és B korong területének 25-szöröse, távolsága a kis korongoktól 1–1 mm, ami átmérőjének 250-ed része. Vagyis a C korong közepén influált, az A és B töltésével ellenkező előjelű töltés vonzó hatásának kell érvényesülnie ebben az esetben is.

*

A verseny ünnepélyes eredményhirdetésére és a díjak kiosztására 2010. november 26-án került sor az ELTE TTK Bolyai János termében. Meghívást kaptak erre az 50 és a 25 évvel ezelőtti Eötvös-versenyek nyertesei is, akik közül *Dömölky* (akkor még *Elsner*) *Gábor, Grad János, Kós Géza, Pfeil Tamás* és *Tasnádi Tamás* tudtak eljönni, és emlékeztek vissza néhány keresetlen mondatban saját versenyélményeikre. A megjelentek kivetítve láthatták az 50 és 25 évvel ezelőtti verseny feladatait és a 25 évvel ezelőtti nyerteseknek a KöMaL-ban akkor megjelent fényképeit.

Ezután következett az idei feladatok ismertetése, a megoldások bemutatása, melyben csaknem a teljes versenybizottság részt vett. Radnai Gyula ismertette a megoldásokat, ezeket az első feladatnál Vigh Máté, a másodiknál Honyek Gyula egészítette ki, az itt is olvasható módon. A második és a harmadik feladathoz kapcsolódóan kísérletek bemutatására is sor került, Honyek Gyula és *Ajtay János* jóvoltából. Megfigyelhettük a levegőből kicsapódó oxigént egy folyékony nitrogénnel töltött teáskanna oldalán, és lézeres fénymutató jelezte az egyik töltött fémkorong elmozdulását, amikor a korongok közé ereszkedett a töltetlen nagy korong.

A díjak és jutalmak kiosztására *Kádár Györgyöt,* az Eötvös Loránd Fizikai Társulat főtitkárát és *Fekete Lászlót,* a MOL magyarországi HR (humánerőforrás fejlesztési) igazgatóját kérte fel a versenybizottság elnöke. Utóbbit azért, mert a MOL jóvoltából idén nemcsak a legjobb versenyzők, hanem tanáraik is váratlan jutalomban részesültek: egyenként 25–25 ezer forint kedvezményt kaptak a Sárospatakon megrendezendő fizikatanári ankét részvételi díjából.

Első díjat, akárcsak 50 évvel ezelőtt, 2010-ben se adott ki a versenybizottság. (Ehhez mindhárom feladat tökéletes megoldására lett volna szükség, ilyen sajnos nem volt.)

Második díjat, vele 20 ezer forint pénzjutalmat öten kaptak: **Backhausz Tibor,** a Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn. 12. évf. tanulója, *Horváth Gábor* tanítványa; **Börcsök Bence,** a szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn. 12. évf. tanulója, *Mező Tamás* tanítványa; **Budai Ádám,** a miskolci Földes Ferenc Gimn. 12. évf. tanulója, *Bíró István* és *Zámborszky Ferenc* tanítványa; **Kalina Kende,** a Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn. 12. évf. tanulója, *Horváth Gábor* és *Csefkó Zoltán* tanítványa; és **Varga Ádám,** a szegedi Ságvári Endre Gyak. Gimn. 12. évf. tanulója, *Tóth Károly* és *Hilbert Margit* tanítványa.

Harmadik díj kiadására sem került sor, viszont tizenegy versenyző kapott *dicséretet,* vele 10 ezer forint értékű könyvjutalmat: **Almási Gergő,** az ELTE fizika szakos hallgatója, aki a budapesti Radnóti Miklós Gyak. Gimnáziumban érettségizett mint *Szalóki Dezső* és *Markovits Tibor* tanítványa; **Ágoston Tamás,** a Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn. 11. évf. tanulója, *Dvorák Cecilia* tanítványa; **Benedek Ádám,** a nagykanizsai Batthyány Lajos Gimn. 11. évf. tanulója, *Dénes Sándorné* tanítványa; **Béres Bertold,** a budapesti Puskás Tivadar Távközlési Techn. 12. évf. tanulója, *Beregszászi Zoltán* és *Alapiné Ecseri Éva* tanítványa; **Kéri Zsófia Nóra,** az ELTE fizika szakos hallgatója, aki a budapesti Trefort Ágoston Gyak. Gimnáziumban érettségizett mint *Kovács Géza* tanítványa; **Kószó Simon,** a szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn. 12. évf. tanulója, *Mező Tamás* tanítványa; **Major Attila,** a szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn. 11. évf. tanulója, *Mező Tamás* tanítványa; **Pácsonyi Imre,** a zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimn. 13. évf. tanulója, *Pálovics Róbert* tanítványa; **Szikszai Lőrinc,** a miskolci Fráter György Kat. Gimn. 12. évf. tanulója, *Edöcsény Levente* tanítványa; **Várnai Péter,** a budapesti Apáczai Csere János Gyak. Gimn. 12. évf. tanulója, *Pákó Gyula* és *Flórik György* tanítványa; **Vona István,** a Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn. 11. évf. tanulója, *Dvorák Cecilia* tanítványa.

A nyertes diákok megjelent tanárai a Vince Kiadó és a MATFUND Alapítvány által felajánlott könyvekből válogathattak.

Végül a versenybizottság elnöke felolvasta *Veres Gábor* fizikus üzenetét, amelyet kérésére intézett a mai versenyzőkhöz Genfből, ahol a nagy hadronütköztetőben a nehézionok ütközésével kapcsolatos izgalmas kísérletekben vesz részt.[2]

A hivatalos program lezajlása után a most már szokásosnak mondható állófogadás következett a RAMASOFT Zrt. jóvoltából. Köszönet minden támogatónknak!

(*Radnai Gyula*)

[2] A kísérletekről rövid tudósítást olvashattunk a KöMaL 2010/8. számában.