

# A 41. Nemzetközi Fizikai Diákolimpia elméleti feladatai<sup>1</sup>

## 1. feladat. Tükörtlöltés egy fémtárgyban

**Bevezetés – Tükörtlöltés módszer.** Helyezzünk el egy  $q$  ponttöltést egy  $R$  sugarú, földelt fémgömb közelében (lásd az 1.(a) ábrát). A ponttöltés hatására a gömbön felületi töltéseloszlás jön létre. A felületi töltéseloszlás által keltett elektromos tér és a potenciál kiszámítása rendkívül nehéz feladat. Azonban az úgynevezett tükörtlöltés módszerrel a számítások lényegesen leegyszerűsíthetők. A módszer lényege az, hogy a gömbön lévő töltéseloszlás által keltett elektromos mező és potenciál leírható egyetlen, a gömb belsejében lévő  $q'$  ponttöltés terével és potenciáljával (ezt a tényt nem kell bizonyítanod).

*Megjegyzés:* Ennek a  $q'$  tükörtlöltésnek az elektromos tere csak a gömbön kívül (beleértve a felületét is) feleltethető meg a felületi töltéseloszlás által keltett elektromos térnek és potenciálnak.

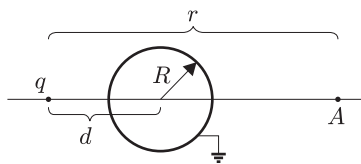


1. ábra. (a) A  $q$  ponttöltés egy földelt fémgömb közelében. (b) A gömbön létrejövő töltés terét megfeleltethetjük a  $q'$  tükörtlöltés elektromos terének

**1. Tükörtlöltés.** Az elrendezés szimmetriájából következik, hogy a  $q'$  ponttöltésnek a  $q$  ponttöltést és a gömb középpontját összekötő egyenesen kell lennie (lásd az 1.(b) ábrát).

- Mekkora a potenciál értéke a gömbön?
- Fejzd ki a tükörtlöltés  $q'$  értékét, valamint a gömb középpontjától számított  $d'$  távolságát  $q$ ,  $d$  és  $R$  segítségével!
- Határozd meg a  $q$  töltésre ható erő nagyságát! Ez az erő taszító (igen vagy nem)?

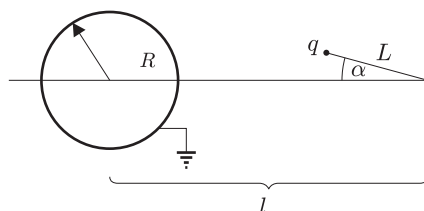
**2. Elektrosztatikus tér leárnyékolása.** Tekintsünk egy  $q$  ponttöltést egy  $R$  sugarú, földelt fémgömb közelében, a gömb középpontjától  $d$  távolságra. Azt vizsgáljuk, hogyan befolyásolja a földelt fémgömb jelenléte az  $A$  pontban az elektromos teret. Az  $A$  pont a gömb túlsó oldalán helyezkedik el (lásd a 2. ábrát). Az  $A$  pont a  $q$  ponttöltést és a gömb középpontját összekötő egyenesen található; a  $q$  ponttöltéstől mért távolsága  $r$ .



2. ábra. Az  $A$  pontban a földelt gömb részlegesen leárnyékolja az elektromos teret

- Határozd meg az  $A$  pontban az elektromos térerősség vektort!
- Határozd meg az elektromos térerősség képletét nagyon nagy távolság ( $r \gg d$ ) esetén, felhasználva, hogy  $(1 + a)^{-2} \approx 1 - 2a$ , ha  $a \ll 1$ .
- A  $d$  távolságra nézve milyen feltételnek kell teljesülni ahhoz, hogy a földelt fémgömb teljesen leárnyékolja a  $q$  töltés terét, vagyis az  $A$  pontban az elektromos térerősség pontosan nulla legyen?

**3. Rezgések a földelt fémgömb elektromos terében.** Egy  $L$  hosszúságú fonál segítségével a földelt fémgömb közelében „felfüggesztünk” egy  $q$  ponttöltést, melynek tömege  $m$ . A fonál másik végét egy falhoz rögzítjük. A fal elektrosztatikus hatásait hanyagoljuk el. A ponttöltés matematikai ingaként viselkedik (lásd a 3. ábrát). A fonálnak a falhoz rögzített vége  $l$  távolságra van a gömb középpontjától. Tegyük fel, hogy a gravitáció elhanyagolható.



3. ábra. Egy ingaként viselkedő ponttöltés a földelt fémgömb közelében

<sup>1</sup> A hivatalos megoldást és a mérési feladatot a KöMaL októberi számában ismertetjük. A feladatok kidolgozására 5 óra állt rendelkezésre.

a) Adjuk meg a  $q$  ponttöltésre ható elektromos erő nagyságát egy adott  $\alpha$  szög esetén, és jelezzük ennek az erőnek az irányát egy jól áttekinthető ábrán!

b) Határozzuk meg ennek az erőnek a fonálra merőleges összetevőjét a következő tagok függvényében:  $l, L, R, q$  és  $\alpha$ .

c) Adjuk meg az inga kis rezgéseinek frekvenciáját!

**4. A rendszer elektrosztatikus energiája.** Elektromos töltéeloszlások esetén a rendszer elektrosztatikus energiája fontos adat. A mi esetünkben (lásd az 1.(a) ábrát), elektrosztatikus kölcsönhatás jön létre a külső  $q$  töltés és a gömbön kialakuló töltések között, valamint létezik elektrosztatikus kölcsönhatás magán a gömbön lévő töltések között is. A  $q$  töltés, valamint a gömb  $R$  sugara, továbbá a  $d$  távolság segítségével határozzuk meg a következő elektrosztatikus energiákat:

a) a  $q$  töltés és a gömbön lévő töltések közötti kölcsönhatás elektrosztatikus energiáját;

b) a gömbön lévő töltések közötti kölcsönhatás elektrosztatikus energiáját;

c) a rendszer teljes kölcsönhatási elektrosztatikus energiáját.

*Útmutatás: Ez a feladat többféleképpen is megoldható!*

(1) Az egyik módszer esetén a következő integrált használhatod:

$$\int_d^\infty \frac{x dx}{(x^2 - R^2)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{d^2 - R^2}.$$

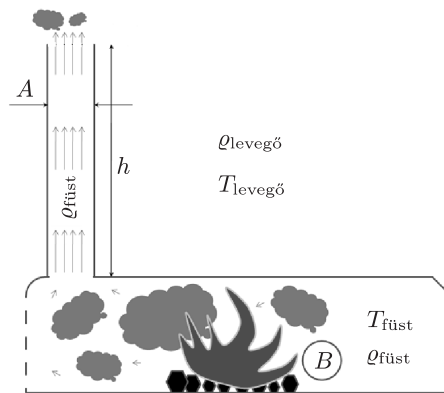
(2) Egy másik módszer esetén felhasználhatod azt a ténnyt, hogy  $N$  ponttöltésből álló rendszer teljes elektrosztatikus energiája az összes töltéspárra vonatkozó energiák összege:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|},$$

ahol a töltéseket  $q_i$  jelöli, és ezek az  $\vec{r}_i$ , ( $i = 1, \dots, N$ ) pontokban helyezkednek el.

## 2. feladat. Kéményfizika

**Bevezetés.** Egy kazánból a légnemű égéstermék (füst, gáz)  $A$  keresztmetszetű,  $h$  magasságú kéményen keresztül jut ki a  $T_{\text{levegő}}$  hőmérsékletű légkörbe (lásd 4. ábra). A kazán égésterének, valamint az égés során keletkezett füstnek a hőmérséklete  $T_{\text{füst}}$ . A kazánban időegység alatt keletkezett légnemű égéstermék térfogata  $B$ .



4. ábra. A  $T_{\text{füst}}$  hőmérsékletű kazán és a  $h$  magasságú kémény

A következő közelítésekkel éljünk:

- A kazánban a gázok áramlási sebessége elhanyagolhatóan kicsi.
- Az égéstermék (füst) sűrűsége megegyezik az ugyanolyan nyomású és hőmérsékletű levegő sűrűségével, továbbá a kazánban lévő gáz ideálisnak tekinthető.
- A külső levegő nyomása a hidrosztatikus nyomás törvénye szerint változik a magasság függvényében; a külső levegő sűrűségének magasságtól való függése elhanyagolható.
- Az égéstermék áramlása megfelel a Bernoulli-törvénynek, mely szerint a következő összeg:

$$\frac{1}{2} \rho v^2(z) + \rho g z + p(z) = \text{állandó}$$

az áramlási tér minden pontjában. A képletben  $\rho$  az égéstermék sűrűsége,  $v(z)$  az áramlás sebessége,  $p(z)$  pedig a nyomás  $z$  magasságban.

- Az égéstermék sűrűségének változása a kémény teljes hosszában elhanyagolható.

### 1. részfeladat.

a) Mekkora az a minimális magasság, mely mellett a kémény hatékonyan működik, azaz az összes keletkező égéstermék képes a légkörbe kijuttatni? Az eredményt  $B$ ,  $A$ ,  $T_{\text{levegő}}$ ,  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  és  $\Delta T = T_{\text{füst}} - T_{\text{levegő}}$  függvényében add meg!

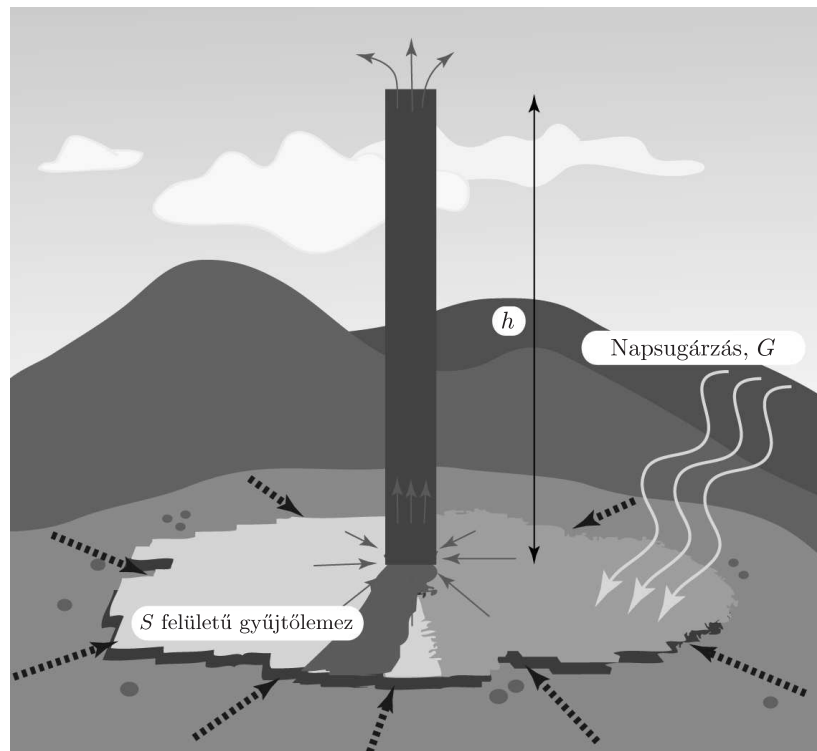
*Fontos: a összes további kérdés megválaszolásánál tételezd fel, hogy a kémény magassága megegyezik ezzel a minimális mérettel.*

b) Tegyük föl, hogy két pontosan azonos kazánhoz, azonos célra két kéményt építenek. A kémények keresztmetszete megegyezik, de különböző földrajzi helyre tervezik őket; az egyiket hideg éghajlatra, ahol a levegő átlagos hőmérséklete  $-30 \text{ }^\circ\text{C}$ , a másikat pedig meleg vidékre, ahol a levegő átlaghőmérséklete  $30 \text{ }^\circ\text{C}$ . Mindkét esetben a kazán belső hőmérséklete  $400 \text{ }^\circ\text{C}$ . A hidegebb helyen levő kémény minimális magassága  $100 \text{ m}$ -nek adódik. Milyen magas a másik kémény?

c) Mekkora a kéményben áramló gáz sebessége? Készíts vázlatos grafikont az áramló gáz sebességéről a magasság függvényében, feltételezve, hogy a kémény keresztmetszete nem változik a magassággal. Jelöld meg a grafikonon azt a magasságot, ahol az égéstermék belép a kéménybe!

d) Hogyan változik a kéményben az égéstermék (gáz) nyomása a magasság függvényében?

**Naperőmű.** A kéményben áramló gáz energiájának hasznosításával naperőművet (napkéményt) lehet létrehozni. Az elrendezést az 5. ábra szemlélteti. A Nap felmelegíti az  $S$  felületű gyűjtőlemez alatt elhelyezkedő levegőt. A gyűjtőlemez szélénél a levegő szabadon áramolhat be a lemez alá. Miközben a felmelegített levegő a kéményen keresztül felfelé távozik (vékony, folytonos nyilak), hideg levegő áramlik a gyűjtőlemez alá a széleken (vastag, pontozott nyilak), és így a napkéményben folytonos levegőáramlás alakul ki. Az áramló levegő egy turbinát hajt meg a kéményben, amely elektromos energiát termel. A napsugárzás időegységre és vízszintes területegységre vonatkoztatott energiáját jelölje  $G$ . Tegyük föl, hogy a gyűjtőlemezre jutó összes napsugárzás a lemez alatt levő levegő melegítésére fordítódik. Jelölje a levegő (egységnyi tömegrre vonatkoztatott) fajhőjét  $c$ , és hanyagoljuk el  $c$  hőmérsékletfüggését. A napkémény hatásfokát a kéményben áramló gáz mozgási energiájának és a gyűjtőlemez alatt levő levegő által elnyelt besugárzási energiának a hányadosaként értelmezzük.



5. ábra. A napkémény felépítése

## 2. részfeladat.

a) Mennyi a napkémény hatásfoka?

b) Grafikonon ábrázold a hatásfoknak a kémény magasságától való függését!

**A Manzanares-ben működő napkémény.** Az első napkémény a spanyolországi Manzanares közelében épült. A kémény magassága  $195 \text{ m}$ , sugara  $5 \text{ m}$ . A gyűjtőlemez  $244 \text{ m}$  átmérőjű körlap. A tipikus működési körülmények mellett a napkéményben lévő levegő fajhője  $1012 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ , a forró levegő sűrűsége megközelítőleg  $0,9 \text{ kg/m}^3$ , a külső levegő átlaghőmérséklete pedig  $T_{\text{levegő}} = 295 \text{ K}$  Manzanares-ben. Az egységnyi vízszintes felületre eső napsugárzás intenzitása nappal, egy átlagos napsütéses napon  $150 \text{ W/m}^2$ .

### 3. részfeladat.

- Mennyi a Manzanares-ben épült napkémény hatásfoka? Eredményedet számszerűen is add meg!
- Mekkora teljesítménnyel működik a Manzanares-ben épült napkémény?
- Mennyi energiát állít elő a Manzanares-ben épült napkémény egy átlagos napsütéses napon?

### 4. részfeladat.

a) Határozd meg, mennyivel emelkedik a napkéményben a kémény torkolatánál belépő (meleg) levegő hőmérséklete a külső (hideg) levegő hőmérsékletéhez képest? Add meg az általános formulát, majd értékeld ki a Manzanares-ben működő napkémény adataival!

b) Hány kilogramm/szekundum a Manzanares-ben működő napkéményben hozama, vagyis mennyi az időegység alatt átáramló levegő tömege?

### 3. feladat. Egyszerű atommagmodell

**Bevezetés.** Bár az atommagok kvantummechanikai objektumok, az alaptulajdonságaikra (mint például sugarukra, kötési energiájukra) vonatkozó fenomenologikus törvények néhány egyszerű feltételezésből megkaphatók:

- az atommagok nukleonokból (protonokból és neutronokból) állnak;
- a nukleonokat összetartó erős kölcsönhatás nagyon rövid hatótávolságú (csak szomszédos nukleonok között működik);
- egy adott atommagban a protonok száma ( $Z$ ) közel azonos a neutronok számával ( $N$ ), azaz  $Z \approx N \approx A/2$ , ahol  $A$  az összes nukleon száma (tömegszám), ha  $A \gg 1$ .

*Fontos: A következő 1–4. részfeladat mindegyikében használd ezeket a feltételezéseket! Az 5. részfeladat az előzőektől függetlenül megoldható.*

**1. Az atommag, mint szorosan illeszkedő nukleonok rendszere.** Egy egyszerű modellben az atommag úgy tekinthető, mint egy gömb, mely egymáshoz szorosan illeszkedő nukleonokból áll (6.(a) ábra), ahol a nukleonok  $r_N = 0,85$  fm sugarú merev golyók ( $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ ). A nukleáris kölcsönhatás csak az egymással közvetlenül érintkező két nukleon között működik. Az atommag teljes  $V$  térfogata nagyobb, mint az öt alkotó nukleonok  $AV_N$  ösztérfogata, ahol  $V_N = \frac{4}{3}r_N^3\pi$ . Az  $f = AV_N/V$  arányt *kitöltési tényezőjének* hívják, és azt adja meg, hogy az atommag térfogatának hányadrészét tölti ki nukleáris anyag.

a) Határozd meg az  $f$  kitöltési tényezőt, feltételezve, hogy a nukleonok egyszerű köbös (simple cubic, SC) rácsba rendeződnek. Az egyszerű köbös rácsban a nukleonok egy végtelen kockarács csúspontjaiban találhatóak. (Lásd 6.(b) ábra.)



6. ábra. (a) Egy atommag, mint szorosan illeszkedő nukleonokból álló gömb. (b) Az egyszerű köbös (simple cubic, SC) térkitöltés

*Fontos: Minden további kérdésben tételezd fel, hogy az atommagok kitöltési tényezője megegyezik a most kiszámolt értékkel! Ha nem tudad megoldani az előző kérdést, akkor a továbbiakban számolj az  $f = 1/2$  értékkel!*

b) Becsüld meg az  $A$  tömegszámú ( $A$  nukleont tartalmazó) atommag átlagos  $\rho_m$  tömegsűrűségét,  $\rho_c$  töltéssűrűségét valamint  $R$  sugarát! Egy nukleon átlagos tömege  $1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ .

**2. Az atommag kötési energiája (térfogati és felületi tagok).** Az atommag kötési energiája az öt alkotó különálló nukleonokra való szétbontásához szükséges energia. A kötési energia legjelentősebb része a szomszédos nukleonok között működő vonzó nukleáris kölcsönhatásból származik. Az atommag belsejében található nukleonokhoz rendelhető kötési energijárulék  $a_V = 15,8 \text{ MeV}$  ( $1 \text{ MeV} = 1,602 \cdot 10^{-13} \text{ J}$ ). Az atommag felületén levő nukleonok járuléka közelítőleg ennek a fele,  $a_V/2$ . Fejezd ki az  $A$  tömegszámú atommag  $E_b$  kötési energiáját  $A$ ,  $a_V$  és  $f$  segítségével, figyelembe véve a felületi korrekciót is!

**3. A kötési energia elektrosztatikus (Coulomb) tagja.** Ismert, hogy az  $R$  sugarú,  $Q_0$  elektromos töltéssel térfogatában egyenletesen feltöltött gömb elektrosztatikus energiája:

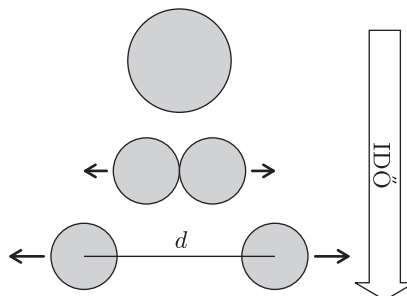
$$U_c = \frac{3Q_0^2}{20\pi\epsilon_0 R}, \quad \text{ahol } \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}.$$

a) A fenti formula felhasználásával határozd meg az atommag elektrosztatikus energiáját! Az atommagban található protonok saját magukra nem hatnak (Coulomb-erővel), csak a többi protonra. Ezt a tényt úgy vehetjük figyelembe,

hogy a végső formulában a  $Z^2 \rightarrow Z(Z - 1)$  átírást hajtjuk végre. Ebben és a következő feladatokban használd ezt a korrekciót!

b) Add meg a kötési energia teljes képletét, mely tartalmazza a fő (térfogati) tagot, valamint a felületi- és Coulomb-korrekciót!

**4. Nehéz atommagok bomlása.** A bomlás olyan nukleáris folyamat, mely során egy atommag könnyebb alkotóelemekre (kisebb atommagokra) esik szét. Tegyük föl, hogy egy  $A$  tömegszámú atommag két azonos részre bomlik, a 7. ábrán látható módon.

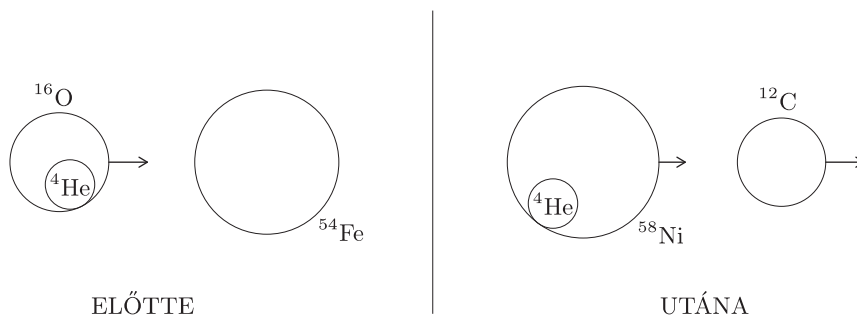


7. ábra. A nukleáris bomlás sematikus rajza a modellünk szerint

a) Határozd meg a bomlástermékek együttes mozgási energiáját ( $E_{\text{kin-t}}$ ), feltételezve, hogy a két könnyebb atommag középpontjának távolsága  $d \geq 2R(A/2)$ , ahol  $R(A/2)$  a bomlás során képződött atommagok sugara! Kezdetben a bomló atommag nyugalomban volt.

b) Feltételezve, hogy  $d = 2R(A/2)$ , határozd meg az előző, a) pontban  $E_{\text{kin}}$ -re kapott kifejezés értékét  $A = 100, 150, 200$  és  $250$  esetén! (Eredményeidet MeV egységben add meg!) A fenti modell alapján becsüld meg, hogy mely  $A$  tömegszám esetén lehetséges bomlás!

**5. Transzfer reakciók.** a) A magfizikában az atommagok és a magreakciók energiáit tömeg egységekben szokás megadni. Például egy nem mozgó (nulla sebességű), ámde az alapállapothoz képest  $E_{\text{exc}}$  energiával gerjesztett atommag tömege  $m = m_0 + E_{\text{exc}}/c^2$ , ahol  $m_0$  a mag nyugalmi tömege alapállapotban. Az  $^{16}\text{O} + ^{54}\text{Fe} \rightarrow ^{12}\text{C} + ^{58}\text{Ni}$  magreakció az egyik példája az úgynevezett „transzfer reakciónak”, amikor az egyik atommag egy része („klaszter”) bejut a másik atommagba (lásd a 8. ábrát). Esetünkben az átkerülő rész egy  $\alpha$  részecske ( $^4\text{He}$ -klaszter). A transzfer reakciók akkor játszódnak le maximális valószínűséggel, ha a kirepülő reakciótermék (esetünkben a  $^{12}\text{C}$  mag) sebessége nagyság és irány szerint megegyezik a becsapódó lövedék mag (esetünkben az  $^{16}\text{O}$ ) sebességével. A  $^{54}\text{Fe}$  céltárgy kezdetben nyugalomban van. A reakcióban a  $^{58}\text{Ni}$  magasan gerjesztett állapotba kerül. Határozd meg ennek az állapotnak a gerjesztési energiáját (és fejezd ki MeV egységekben), ha a lövedék  $^{16}\text{O}$  mag mozgási energiája  $50$  MeV. A fény sebessége  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s.



8. ábra. A transzfer reakció vázlatja

1.	$M(^{16}\text{O})$	15,994 91 a.m.u.
2.	$M(^{54}\text{Fe})$	53,939 62 a.m.u.
3.	$M(^{12}\text{C})$	12,000 00 a.m.u.
4.	$M(^{58}\text{Ni})$	57,935 35 a.m.u.

1. táblázat. A reakciótermékek nyugalmi tömegei alapállapotukban atomi tömegegységben (a.m.u.), ahol  $1 \text{ a.m.u.} = 1,6605 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

b) Az a) részben tárgyalt, gerjesztett állapotú  $^{58}\text{Ni}$  mag alapállapotba jut („legerjesztődik”), miközben kibocsát egy gamma-fotont a mozgásának irányában. Tárjaljuk ezt a bomlást abban a vonatkoztatási rendszerben, amelyben a  $^{58}\text{Ni}$

mag nyugalomban van, és határozzuk meg a  $^{58}\text{Ni}$  mag visszalökődési energiáját (vagyis azt a mozgási energiát, amivel a  $^{58}\text{Ni}$  mag rendelkezik a foton kibocsátása után). Mekkora a foton energiája ebben a vonatkoztatási rendszerben? Mekkora a foton energiája a laboratóriumi kordináta rendszerben (azaz mekkora foton energiát mérne az a detektor, amelyet a  $^{58}\text{Ni}$  mag mozgásának irányába állítanak be)?