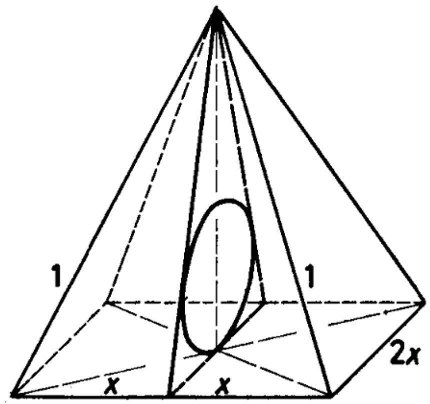
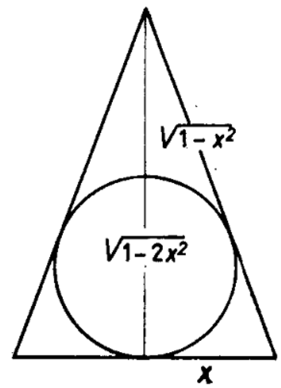
Jelöljük a kérdéses alapot $2x$-szel, így a beírt kör $\varrho$ sugarának ismert $t/s$ kifejezése céljára a háromszög területe $t = x\sqrt{1-x^2}$, kerülete $2x+2$, tehát a vizsgálandó függvény

$$\varrho = \frac{t}{s} = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x} = \sqrt{\frac{x^2-x^3}{1+x}},$$

és a háromszög-egyenlőtlenség alapján $0 < x < 1$.




Mivel $\varrho > 0$, és pozitív szám négyzete monoton nő, azért $\varrho$-nak ugyanott van maximuma, ahol $\varrho^2$-nek, ezért elég vizsgálnunk a következő függvényt:

$$\varrho^2 = f(x) = \frac{x^2-x^3}{1+x}.$$

Deriváltja, mindjárt átalakításokkal:

$$f'(x) = \frac{(2x-3x^2)(1+x)-(x^2-x^3)}{(1+x)^2} = \frac{2x(1-x-x^2)}{(1+x)^2} =$$

$$= \frac{x\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}-x\right)(\sqrt{5}+1+2x)}{(1+x)^2},$$

az értelmezési tartomány minden helyén létezik. $f(x)$ csakis az

$$x_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad (= 0{,}618\ldots)$$

helyen tűnik el, és itt áthaladva, az utolsó alakban a számláló első zárójele vált előjelet, pozitívból negatívvá válik, a többi tényező pozitív.

Eszerint $\varrho^2$ és $\varrho$ értéke az $x_0$-on áthaladva növekedésből csökkenésbe megy át, ott maximum van. És mivel ekkor az alapél $2x_0 \neq 1$, az állítás első részét bebizonyítottuk. (Valóban, $x_0$ mellett $\varrho = 0{,}3003$, $2x = 1$ mellett viszont csak $\varrho = \sqrt{3}/6 = 0{,}2887$.)

2. Messük a gúlát a tengelyen átmenő és valamelyik alapélére merőleges $S$ síkkal. Ez nyilvánvalóan szimmetriasíkja a gúlának, ennélfogva a beírt gömbnek az átmetszett oldallapokkal való érintkezési pontjai benne vannak $S$-ben. $S$ a gúlából egyenlő szárú háromszöget metsz ki, melynek szárai az oldallapok $o_m$ magasságai, a beírt gömbből pedig egy főkört, és ez a főkör éppen a kimetszett háromszög beírt köre.

A gúla alapélét ismét $2x$-szel jelölve a föntebbi számítás az alábbiak szerint módosul. A metszetháromszög szárainak hossza (a fönti 1 helyén) $\sqrt{1-x^2}$, így a háromszög magassága $\sqrt{1-2x^2}$, kerülete $2x + 2\sqrt{1-x^2}$. Ezekből

$$\varrho = \frac{x\sqrt{1-2x^2}}{\sqrt{1-x^2}+x}, \quad \text{ahol} \quad 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (= 0{,}707).$$

Belátjuk, hogy $\varrho = f(x)$ az értelmezési tartományában folytonos függvénye az $x$-nek. Valóban, ez áll a kifejezés $x$, $\sqrt{1-x^2}$, $\sqrt{1-2x^2}$ elemeire, így a számlálóra és a nevezőre is, és mivel a nevező sehol sem 0 az intervallumban, azért a hányadosra is.

Így elég mutatni egy olyan $x_1$ értéket, amely mellett $\varrho$-ra nagyobb értéket kapunk, mint $x = 0{,}5$ mellett, és egy olyan $x_2$ értéket, ahol $\varrho$ kisebbnek adódik, mint $x = 0{,}5$ mellett, hacsak az $(x_1, x_2)$ intervallum tartalmazza az $x = 0{,}5$ helyet. Megfelel erre

$$x_1 = 0{,}48 \qquad \text{és} \qquad x_2 = 0{,}52,$$

ugyanis az elsőt lekerekítve, a másodikat fölkerekítve

$$f(x_1) = 0{,}2597, \qquad f(0{,}5) = 0{,}2588, \qquad f(x_2) = 0{,}2564,$$

ezzel megmutattuk, hogy a feladat 2. állítása is helyes.

Bonyolultabb számítással meg lehet mutatni, hogy $\varrho$ az $x = 0{,}4776$ és $x = 0{,}4777$ helyek közt veszi fel legnagyobb értékét, és az 0,2597.

*Megjegyzés.* Ismét $\varrho^2$ maximumhelyét keressük, kifejezését így alakítjuk:

$$\varrho^2 = g(x) = \frac{x^2(1-2x^2)}{1+2x\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^2(1-2x^2)(1-2x\sqrt{1-x^2})}{1-4x^2(1-x^2)}.$$

A nevező $(1-2x^2)^2$, és mivel $\varrho$ kifejezésében kikötöttük, hogy $1-2x^2 > 0$, azért egyszerűsíthetünk:

$$g(x) = \frac{x^2(1-2x\sqrt{1-x^2})}{1-2x^2}.$$

[A számláló is pozitív, mert $x = \sin z$ (ahol $0° < z < 45°$) helyettesítéssel $(1-\sin 2z)$ alakba írható.]

Felírjuk $g'(x)$-et és megmutatjuk, hogy $g'(0{,}5) < 0$, ebből már következik a feladat állítása. A 2192. feladatban látott $(uv)' = u'v + uv'$ deriválási szabályhoz hasonlóan lehet belátni, hogy ha $u$ és $v$ deriválhatók egy intervallumban és ugyanott $v \neq 0$, akkor

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Esetünkben $v = 1-2x^2 > 0$, továbbá a számlálóban

$$(1-2x\sqrt{1-x^2})' = -2\sqrt{1-x^2} + \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-2+4x^2}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(tovább is alkalmazzuk a látott közös nevezőre hozást), így a számláló deriváltja, majd a nevezőé:

$$u' = 2x(1-2x\sqrt{1-x^2}) - \frac{2x^2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = 2x + \frac{8x^4-6x^2}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{ill.} \quad v' = -4x.$$

Ezeket beírva, $g'(x)$ számlálója,

$$u'v - uv' = 2x - 4x^3 + \frac{-16x^6+20x^4-6x^2}{\sqrt{1-x^2}} + 4x^3 + \frac{8x^6-8x^4}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= 2x - \frac{8x^6-12x^4+6x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

[Nincs szükség $g'(0{,}5)$ előjelének megállapításához a nevezőre, mert az pozitív.] A kapott kifejezés értéke pedig $2x = 1$ helyettesítéssel:

$$1 - \frac{7}{4\sqrt{3}} = 1 - \sqrt{\frac{49}{48}} < 0,$$

ezt akartuk belátni.