Megoldásvázlatok a 2010/7. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

Számadó László
Veszprém

I. rész

1. *Hajtsuk végre a következő utasításokat. Egy tetszőleges kétjegyű számnak vegyük a tízszeresét. Az így kapott számhoz adjunk hozzá egy tetszőleges számjegyet. Ennek az összegnek vegyük a százszorosát, majd adjuk hozzá az eredeti kétjegyű számot. Az ekkor kapott számból vegyük el a tetszőleges számjegy kétszeresét. A különbségnek vegyük a hetedét.*

Igazoljuk, hogy az eljárás végén mindig egész számot kapunk. (*11 pont*)

Megoldás. Legyen a tetszőleges kétjegyű szám $\overline{ab}$ (a pozitív számjegy, b számjegy), a tetszőleges számjegy pedig c. A feladat utasításait követve ezeket a számokat kapjuk:

$$\overline{ab},\quad \overline{ab0},\quad \overline{abc},\quad \overline{abc00},\quad \overline{abcab},\quad \overline{abcab}-2c.$$

Ez utóbbit így is írhatjuk:

$$1001\cdot\overline{ab}+100c-2c=1001\cdot\overline{ab}+98\cdot c=7\cdot(143\cdot\overline{ab}+14\cdot c).$$

Mivel a zárójelben lévő kifejezés egész szám, azért valóban egész számot kapunk az eljárás végén.

Megjegyzés: A feladat állítása tetszőleges egész szám esetén teljesül.

2. *Határozzuk meg a p értékét úgy, hogy a következő egyenletnek legyen valós gyöke:*

$$\sqrt{x^2-2010x-2011}+\sqrt{x^2+2011x+2010}+\sqrt{x^2-p^2}=0.$$

(*12 pont*)

Megoldás. Három nemnegatív valós szám összege csak úgy lehet nulla, ha mindegyik nulla. A másodfokú kifejezéseket szorzattá bonthatjuk:

$$x^2-2010x-2011=(x-2011)(x+1),$$
$$x^2+2011x+2010=(x+2010)(x+1),$$
$$x^2-p^2=(x-p)(x+p).$$

Ekkor az egyenletet így írhatjuk:

$$\sqrt{(x-2011)(x+1)}+\sqrt{(x+2010)(x+1)}+\sqrt{(x-p)(x+p)}=0.$$

Az $x=-1$ esetén az első két tag értéke nulla. Ha van megoldás, akkor a harmadik tagnak is nullának kellene lennie -1 helyettesítésénél:

$$(-1)^2-p^2=(-1+p)(-1-p)=0.$$

Vagyis $p_1=1$ vagy $p_2=-1$.

3. *Adott a koordinátarendszerben öt pont: $A(7;-1)$, $B(-2;2)$, $C(-1;5)$, $D(6;6)$, $E(7;6)$.*

a) Adjuk meg azt a P pontot (ha van ilyen), amelyre $PA=PB=PC=PD$.

b) Igazoljuk, hogy nincs olyan pont, amely az A, B, C és E pontoktól egyenlő távolságra található. (*14 pont*)

Megoldás. *a*) A keresett P pont az $ABCD$ négyszög köré írt körének középpontja. Ennek meghatározására egy lehetséges gondolatmenet a következő:

Felírjuk az ABC háromszög köré írt körének egyenletét. Megnézzük, hogy erre a körre illeszkedik-e a D pont. Ha igen, akkor az előbbi kör középpontja lesz a keresett P pont. Írjuk fel az AB szakasz f_3 felezőmerőlegesének egyenletét. Az AB szakasz felezőpontja: $F_3\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$, az f_3 egyenes normálvektora: $\overrightarrow{n_3}(3;-1)\parallel\overrightarrow{AB}$. Vagyis az egyenlet:

$$f_3\colon 3x-y=7.$$

Írjuk fel a BC szakasz f_1 felezőmerőlegesének egyenletét. Az BC szakasz felezőpontja: $F_1\left(-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right)$, az f_1 egyenes normálvektora: $\overrightarrow{n_1}(1;3)\parallel\overrightarrow{BC}$. Vagyis az egyenlet:

$$f_1\colon x+3y=9.$$

Meghatározzuk a két egyenes metszéspontját, ehhez a

$$\left.\begin{aligned} 3x-y&=7\\ x+3y&=9 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. Ebből kapjuk: $x=3$, $y=2$. Vagyis az ABC háromszög köré írt körének középpontja: $K(3;2)$.

Meghatározzuk a középpont és valamelyik csúcs távolságát, hogy a kör sugarát is megkapjuk: $KA=KB=KC=5$. Ezek alapján a kör egyenlete: $(x-3)^2+(y-2)^2=25$. A $D(6;6)$ pont koordinátáinak behelyettesítésével egyenlőséget kapunk, ezért a D pont illeszkedik erre a körre, azaz $ABCD$ húrnégyszög. A keresett pont azonos a K ponttal, vagyis $P(3;2)$.

Megjegyzés. Rövidebb számolással is eljuthatunk ehhez az eredményhez, ha észrevesszük és belátjuk, hogy az ABC háromszög derékszögű. Ekkor az ABC háromszög köré írt körének középpontja az AC szakasz felezőpontja lesz (Thalész-kör).

b) Ha van ilyen pont, akkor az illeszkedik az AE és a BC szakasz felezőmerőlegesére is. A tanult módon felírjuk a két felezőmerőleges egyenletét, majd meghatározzuk a metszéspontjukat.

Az AE szakasz felezőmerőlegesének egyenlete: $y=\frac{5}{2}$. A BC szakasz felezőmerőlegesének egyenlete: $x+3y=9$. A metszéspont: $Q\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$.

Ha van megfelelő pont, akkor az csakis a Q lehet. Eddig tudjuk, hogy $AQ=EQ$ és $BQ=CQ$. Mivel

$$EQ=\sqrt{\left(7-\frac{3}{2}\right)^2+\left(6-\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{170}}{2} \quad \text{és} \quad CQ=\sqrt{\left(-1-\frac{3}{2}\right)^2+\left(5-\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{50}}{2},$$

így $EQ\neq CQ$, vagyis valóban nincs a feltételeknek megfelelő pont.

Megjegyzés. Az állítás igazolását most önállóan végeztük el. Természetesen az *a*) részben kapott eredmények felhasználásával is igazolhattuk volna a *b*) állítást: az ABC köré írt kör egyenletébe behelyettesítjük az $E(7;6)$ koordinátáit.

4. *Az $f(x)$ másodfokú függvény esetén minden valós x-re teljesül, hogy*

$$f(x)+f(x+1)+1=2\cdot\big(f(x)+x+1\big). \tag{1}$$

Adjuk meg $f(8)-f(4)$ értékét. (*14 pont*)

Megoldás. Legyen $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c valós számok). Ekkor a feladat szövege szerint minden valós x esetén:

$$ax^2+bx+c+a(x+1)^2+b(x+1)+c+1=2ax^2+2bx+2c+2x+2.$$

Elvégezve a műveleteket, összevonásokat: $2ax+a+b=2x+1$. Ezt a következő alakban is írhatjuk: $2(a-1)x=1-a-b$.

Ez minden valós x-re akkor teljesül, ha $2(a-1)=1-a-b=0$, azaz $a=1$, és $b=0$, a c tetszőleges. Vagyis $f(x)=x^2+c$. Ekkor $f(8)-f(4)=8^2+c-4^2-c=48$.

Megjegyzés. Tetszőleges, az (1)-nek eleget tevő $f(x)$ függvény esetén teljesül, hogy $f(8)-f(4)=48$. Ezt rekurzívan bizonyíthatjuk.

II. rész

5. *Egy színpadi díszletet a díszlettervező egy* 1 m × 2,5 m*-es préselt lemezből szeretné kivágatni. A lapra* 1 dm*-es beosztással rácsot rajzolnak, a téglalap hosszú középvonalának egyenesét y, az erre merőleges egyik oldal egyenesét pedig x tengelynek tekintik. Berajzolják az $x\mapsto 25-x^2$ hozzárendelésű függvény rácspontjait. A rácspontokat összekötő egyenes szakaszok mentén kifűrészelik azt a konvex sokszöget, amelynek egyik oldala az eredeti téglalap egyik oldalával egybeesik. Hány* dm^2*-rel kapnának nagyobb területű síkidomot, ha a függvény görbéje mentén tudnának fűrészelni?* (*16 pont*)

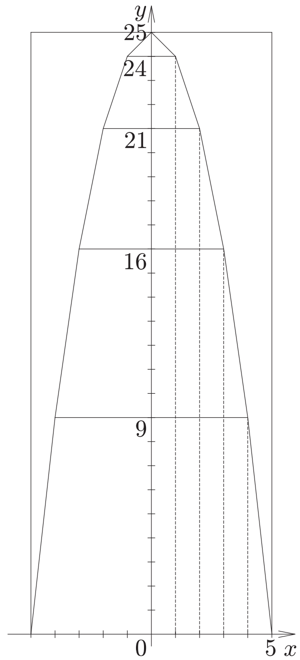
Megoldás. Az *ábra* mutatja a konvex sokszöget, amely négy húrtrapézból és egy egyenlőszárú háromszögből áll. Ezek területének összege:

$$t=\frac{(10+8)\cdot 9}{2}+\frac{(8+6)\cdot 7}{2}+\frac{(6+4)\cdot 5}{2}+$$

$$+\frac{(4+2)\cdot 3}{2}+\frac{2\cdot 1}{2}=$$

$$=81+49+25+9+1=165.$$

Vagyis a sokszög területe 165 dm^2.



Számoljuk ki, hogy mennyi lenne annak a síkidomnak a területe, amelyet a függvény görbéje mentén fűrészelve kapnánk. Ehhez a görbe alatti területet kell meghatároznunk:

$$T = \int_{-5}^{5} (25 - x^2)\, dx = \left[25x - \frac{x^3}{3}\right]_{-5}^{5} =$$

$$= 125 - \frac{125}{3} + 125 - \frac{125}{3} = \frac{500}{3}.$$

A két terület különbsége adja a kérdésre a választ:

$$T - t = \frac{500}{3} - 165 = \frac{5}{3}.$$

Azaz csak $\frac{5}{3}$ dm^2-rel lenne nagyobb a görbe mentén kifűrészelt síkidom területe.

6. *Az $f(x) = |x-1| + |x-5| - 4$ hozzárendeléssel megadott függvény jó közelítéssel egy középszakasz jellegű folyó keresztmetszetét adja. A koordinátarendszer egysége a valóságban 1 métert jelent. Tudjuk, hogy a folyó sebessége 1,2 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, a vízállás pedig 4 méteres.*

a) Mekkora mennyiségű víz halad keresztül a folyó keresztmetszetén 1 óra alatt?

b) Hány százalékkal csökken a folyó vízhozama, ha a vízszint 2 méternyit apad?

c) Mennyivel csökken a vízszint az eredetihez képest, ha a híradások szerint a folyó vízhozama a felére esett vissza? (*16 pont*)

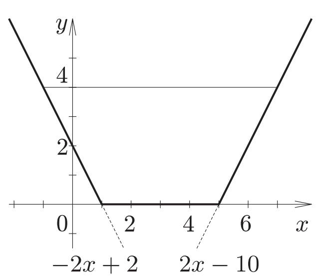
Megoldás. Rajzoljuk le a függvény görbéjét.

Ha $x < 1$, akkor $f(x) = |x-1| + |x-5| - 4 = -x + 1 - x + 5 - 4 = -2x + 2$.

Ha $1 \le x \le 5$, akkor $f(x) = |x-1| + |x-5| - 4 = x - 1 - x + 5 - 4 = 0$.

Ha $5 < x$, akkor $f(x) = |x-1| + |x-5| - 4 = x - 1 + x - 5 - 4 = 2x - 10$.

Az így kapott három segédegyenes megfelelő része adja a függvény görbéjét, amint ezt az *ábrán* láthatjuk. Bejelöltük a 4 méteres vízállás szintjét is.



a) Mivel a folyó sebessége $1{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, azért 1 óra alatt, azaz 3600 s alatt 4320 métert halad. A folyó keresztmetszetén egy ilyen hosszú vízoszlop halad keresztül. Ennek a húrtrapéz alapú hasábnak a térfogatát kell meghatároznunk. A függvény adatai alapján a trapéz párhuzamos oldalainak hossza 4 m és 8 m, a trapéz magassága 4 m. A hasáb magassága 4320 m. Ezek alapján a keresett térfogat:

$$V = \frac{(4+8)\cdot 4}{2}\cdot 4320 = 103\,680.$$

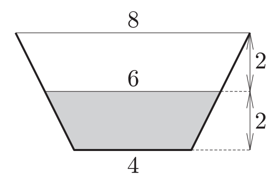
Vagyis 1 óra alatt 103 680 m^3 víz halad keresztül a folyó keresztmetszetén.

b) Ha a vízszint 2 méterrel csökken, akkor a vízállás már csak 2 méter lesz. Kiszámítjuk az eredeti és az új keresztmetszet esetén a területet, ekkor meg tudjuk mondani a vízhozam csökkenését. Az adatokat a *vázlatrajzon* rögzítettük.

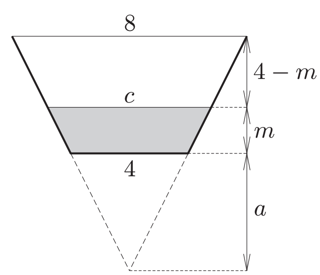
Az eredeti keresztmetszet területe: $T = \frac{(4+8)\cdot 4}{2} = 24$. Az új keresztmetszet területe: $t = \frac{(4+6)\cdot 2}{2} = 10$. A kérdéses százalék:

$$\frac{T-t}{T}\cdot 100 = \frac{1400}{24} \approx 58{,}3.$$

Vagyis kb. 58,3%-kal csökkent a folyó vízhozama.



c) Azt a vízszintet keressük, amikor a keresztmetszet *vázlatrajzán* a szürkével jelölt rész területe fele az eredeti trapéz területének. Rajzunkon a trapéz kiegészítő háromszöge is látható.



Használjuk a rajz jelöléseit. Három hasonló háromszög látható az ábrán. Ezek alapján: $\frac{a}{4} = \frac{a+4}{8}$, azaz $a = 4$, illetve $\frac{4}{4} = \frac{4+m}{c}$, azaz $c = m+4$.

Tudjuk, hogy az eredeti keresztmetszet területe: $T = 24$. A szürkével jelölt rész területe: $t_2 = \frac{(4+c)\cdot m}{2} = 12$, azaz $(4+c)\cdot m = 24$. Behelyettesítve a korábban kapott $c = m+4$ eredményünket: $(m+8)\cdot m = 24$. Az így kapott $m^2 + 8m - 24 = 0$ másodfokú egyenlet megoldásai: $m_{1;2} = -4 \pm 2\sqrt{10}$.

Csak a pozitív érték jöhet szóba: $m = -4 + 2\sqrt{10} \approx 2{,}32$. Vagyis kb. $4 - 2{,}32 = 1{,}68$ méterrel csökkent a vízszint az eredetihez képest, ha a folyó vízhozama a felére esett vissza.

7. *A négyzetszámokat háromszög alakzatba rendezzük az alábbiak szerint:*

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 4 & 9 & 16 & & \\ & 25 & 36 & 49 & 64 & 81 & \\ 100 & 121 & 144 & 169 & 196 & 225 & 256 \\ & & & \dots & & & \end{array}$$

a) *Melyik szám áll a* 13. *sor* 7. *helyén?*
b) *Hol található a* 66 049?
c) *Mennyi a* 24. *sorban lévő számok összege?* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) A sorokban rendre $1, 3, 5, \ldots$ darab négyzetszám található. A 13. sort megelőzően 12 teljes sor található, vagyis az első 12 páratlan szám összegét kell vennünk. Ez $1 + 3 + \ldots + 23 = 144$. A 13. sorban a 7. szám a $144 + 7 = 151$. négyzetszám lesz.

Vagyis a kérdezett helyen a $151^2 = 22\,801$ áll.

b) Az n. sor utolsó tagja n^4. Mivel $66\,049 = 257^2$, azért a 257. négyzetszám helyét kell megkeresnünk. Tudjuk, hogy $257 = 16^2 + 1$. Az első 16 páratlan szám összege $16^2 = 256$, ezért a 257. négyzetszám a 17. sor 1. helyén áll.

c) A 23. sor utolsó tagja a 23^2, azaz az 529. négyzetszám. A 24. sor utolsó tagja pedig a 24^2, azaz az 576. négyzetszám. A feladatunk a 530. négyzetszámtól az 576. négyzetszámig összeadni az összes négyzetszámot.

Felhasználjuk a négyzetszámok összegzésére vonatkozó képletet: $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. A keresett összeg:

$$S_{576} - S_{529} = \frac{576 \cdot 577 \cdot 1153}{6} - \frac{529 \cdot 530 \cdot 1059}{6} = 14\,381\,671.$$

8. *Hat darab $\sqrt{3}$ és hat darab 4 hosszúságú szakaszt valamilyen sorrendben úgy rakunk egymáshoz, hogy a végén egy húrtizenkétszög alakuljon ki. Mekkora a tizenkétszög köré írt kör sugara?* (*16 pont*)

Megoldás. A keresett kör sugara legyen r, a középpontja pedig O. A $\sqrt{3}$ hosszúságú húrhoz tartozó középponti szög legyen α, a 4 hosszúságú húrhoz tartozó középponti szög pedig legyen β. Tudjuk, hogy $6\alpha + 6\beta = 360^\circ$, így $\alpha + \beta = 60^\circ$.

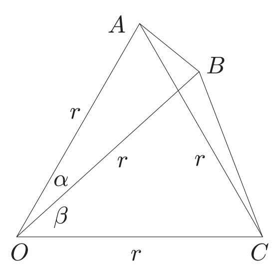
Válasszuk ki a tizenkétszög két olyan szomszédos oldalát, amelyek különböző hosszúak. Legyenek ezek pl. $AB = \sqrt{3}$, $BC = 4$. Az előzőek alapján tudjuk, hogy AOC háromszög szabályos, hiszen $AO = CO = r$, $AOC\sphericalangle = \alpha + \beta = 60^\circ$. Vagyis $AC = r$. Az egyenlő íveken nyugvó középponti és kerületi szögekre vonatkozó tétel alapján:

$$ABC\sphericalangle = \frac{360^\circ - 60^\circ}{2} = 150^\circ.$$

Alkalmazzuk az ABC háromszögre a koszinusztételt:

$$AC^2 = 3 + 16 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 4 \cdot \cos 150^\circ = 31,$$
$$AC = r = \sqrt{31}.$$

A keresett kör sugara $\sqrt{31}$ hosszúságú.



9. *Egy pihenőpark használatáért az üzemeltető pénzt szeretne kapni, ezért két lehetőséget dolgoztatott ki. Az első változat szerint lenne 12 órás és 6 órás jegy. A 12 órás jeggyel nyitástól zárásig bent lehet lenni 1000 Ft-ért, a 6 órás jegy ára pedig 600 Ft lenne. A második változat szerint lenne 3 órás jegy 350 Ft-ért, 6 órás jegy 600 Ft-ért, 9 órás jegy 850 Ft-ért és az ezt meghaladó időre szóló jegy 1250 Ft-ért. Megfigyeltek 150 látogatót és a következő gyakoriság adódott:*

időtartam (h)	0–1	1–2	2–3	3–4	4–5	5–6	6–7	7–8	8–9	9–10	10–11	11–12
gyakoriság (fő)	6	7	11	18	25	26	20	16	15	4	2	0

a) *Mennyi lesz az adatok alapján az egy főre eső átlagos bevétel az első változat szerint?*

b) *Mennyi lesz az adatok alapján az egy főre eső átlagos bevétel a második változat szerint?*

c) *Egy harmadik változatban 4, 8 és 12 órás jegyeket lehetne vásárolni, melyek ára arányos lenne az időtartammal. Milyen áron kellene adni ezeket a jegyeket, ha a rendelkezésre álló adatok alapján az egy főre eső átlagos bevételként 700 Ft körüli értéket szeretne kapni az üzemeltető és a jegyek ára 10-zel osztható?* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Az első változat szerint $20 + 16 + 15 + 4 + 2 + 0 = 57$ fő 1000 Ft-os jegyet, és $150 - 57 = 93$ fő 600 Ft-os jegyet vásárolna.

Ekkor az egy főre eső átlagos bevétel:

$$\frac{57 \cdot 1000 + 93 \cdot 600}{150} = 752 \left(\frac{\text{Ft}}{\text{fő}}\right).$$

b) A második változat szerint $4+2+0=6$ fő 1250 Ft-os jegyet, $20+16+15=51$ fő 850 Ft-os jegyet, $18+25+26=69$ fő 600 Ft-os jegyet és $6+7+11=24$ fő 350 Ft-os jegyet vásárolna. Ekkor az egy főre eső átlagos bevétel:

$$\frac{24\cdot 350+69\cdot 600+51\cdot 850+6\cdot 1250}{150}=671\ \left(\frac{\text{Ft}}{\text{fő}}\right).$$

c) Legyen a 4 órás jegy ára x Ft, ekkor a 8 órásé $2x$ Ft, a 12 órásé $3x$ Ft. A megadott adatok alapján $15+4+2+0=21$ fő $3x$ Ft-os jegyet, $25+26+20+16=87$ fő $2x$ Ft-os jegyet és $6+7+11+18=42$ fő x Ft-os jegyet vásárolna. Ekkor az egy főre eső átlagos bevétel:

$$\frac{42\cdot x+87\cdot 2x+21\cdot 3x}{150}=\frac{279x}{150}\ \left(\frac{\text{Ft}}{\text{fő}}\right).$$

Azt szeretnénk, hogy ez a szám 700 körüli érték legyen, vagyis $\frac{279x}{150}=700$, amiből $x\approx 376$.

A jegyek ára kerekítés után lehetne: 380 Ft a 4 órásé, 760 Ft a 8 órásé és 1140 Ft a 12 órásé.