

Emelt szintű gyakorló feladatsor

Simon János

Budapest

I. rész

1. Az **iM** bolygón az év ugyanúgy 365 napból áll, mint nálunk. A hónapok hossza szintén 28, 30 vagy 31 nap. Bizonyítsuk be, hogy akkor az évnek ott is 12 hónapból kell állnia.

Mennyi a különböző hosszúságú hónapok száma ezen a bolygón, ha tudjuk, hogy ott több a 28 napos hónap, mint nálunk? (11 pont)

2. Adjuk meg az összes olyan pozitív egész számot, melynek 90 pozitív osztója van és ezek közül legalább 10 egymást követő szám. (12 pont)

3. Hány megoldása van az alábbi egyenletnek, ha x és y is pozitív, 9-nél kisebb valós szám?

$$\log_x 64 + \log_8 x^2 = -4 \sin\left(y + \frac{\pi}{3}\right).$$

(14 pont)

4. Egy háromszög a , b , c oldalhosszai egész számok, és egyik magasságának hossza egyenlő a másik kettő összegével. Mutassuk meg, hogy ekkor az $a^2 + b^2 + c^2$ összeg négyzetszám. (14 pont)

II. rész

5. Tizenhat pozitív valós szám összege 100, a négyzetösszegük 1000. Legfeljebb mekkora lehet a legnagyobb szám? (16 pont)

6. Adott egy háromszög $S(0;1)$ súlypontja és c oldalegyenesének egyenlete $x - 2y = -3$. A c oldalegyenesre illeszkedő B csúcs az abszcissa tengelyen van. A C csúcsa a $k: (x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 25$ egyenletű körre illeszkedik. Határozzuk meg a háromszög csúcsainak koordinátáit. (16 pont)

7. Miből élnek a fapados légitársaságok? A Budapest–Róma út oda és vissza 18 000 Ft. Erre a járatra egy ügynökség 35 helyet kínál. Ezeket általában az interneten való megjelenés után azonnal lefoglalják és kifizetik. Általában a foglalások kb. 20%-át a repülés előtt lemondják. Az egyszerűség kedvéért számoljunk pontosan 20%-kal. Mivel akciós áron foglaltak az ügyfelek, lemondás esetén a befizetett összeget nem kapják vissza. Ilyenkor ezeket a helyeket „Last Minute” áron értékesíti a cég 15 000 Ft-ért. Ezért érdekes az ügynökség számára, hogy egy járaton mennyi lehet a lemondások számának esélye.

a) Határozzuk meg annak a valószínűségét (a fent említett járat és ügynökség esetén), hogy a lemondások száma:
– pontosan 7;
– legfeljebb 5;
– legalább 6.

b) Számítsuk ki, hogy mennyi lehet az ügynökség várható bevétele ezen a járaton a lemondott helyek újraértékesítése után?

A lemondások újabb bevételhez juttatják az ügynökséget, ezért a tényleges 35 helyett 40 helyet hirdetnek meg a járatra. Ha véletlenül 35-nél többen szeretnének utazni ezen a járaton (ezt hívják túlfoglalásnak), ekkor a létszám felettieknek gyorsan drágább jegyet kell vásárolnia az irodának 24 000 Ft-ért.

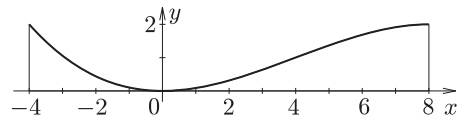
c) Számítsuk ki, hogy az ügynökségnek egy járatra eredetileg eladott 40 hely esetén mennyi bevétele lesz, ha
– 10-en lemondják az utazást;
– mind a 40-en utaznak.

d) Mekkora a túlfoglalás valószínűsége? (16 pont)

8. Egy 12 méter széles patakmeder keresztmetszetét egy adott helyen az

$$f: [-4; 8] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto -\frac{1}{128}x^3 + \frac{3}{32}x^2$$

függvény grafikonja írja le.



a) Mutassuk meg, hogy a függvénynek az origóban lokális minimumhelye, az $x = 8$ -ban pedig lokális maximumhelye van.

b) Mekkora lehet a patak legnagyobb vízállása, amikor még nem önt ki? Hány liter víz folyik át ilyenkor 1 óra alatt a teljes keresztmetszeten, ha a patakban a víz folyásának sebessége $2,5$ m/s? (16 pont)

9. Egy hegyesszögű háromszög oldalainak hossza: $a = 20$, $b = 13$ és $c = 21$. A köré írható kör középpontja O . Az A csúsból induló magasságvonalnak a köré írt körrel vett A -tól különböző metszéspontja D . A BO egyenes köré írt körrel vett B -től különböző metszéspontja E . Határozzuk meg a $BECD$ négyszög területét. (16 pont)