A 2009–2010. évi Országos Középiskolai Matematikai Tanulmányi Verseny feladatai

I. kategória: Szakközépiskolák

Első (iskolai) forduló

1. Melyek azok az $m \in \mathbb{Z}$ számok, amelyekre az $(m-2) \cdot x^2 - 2mx - 1 = 0$ egyenletnek legfeljebb egy, az $m \cdot x^2 + 3mx - 4 = 0$ egyenletnek legalább egy valós gyöke van?

2. Egy derékszögű háromszög átfogóját a beírt kör érintési pontja két szakaszra osztja. Bizonyítsa be, hogy a háromszög területének számértéke egyenlő ezen két szakasz hosszának a szorzatával!

3. Melyik az a 10-es számrendszerben felírt, $\overline{xyzu}$ alakú négyjegyű szám, amelynek számjegyeire teljesülnek az $u + z - 4x = 1$ és $u + 10z - 2y = 14$ feltételek?

4. Az ABC hegyesszögű háromszög M magasságpontja a CC_1 magasságvonalon úgy helyezkedik el, hogy $CM : MC_1 = 3 : 1$. (C_1 a magasság talppontja.) Mekkora az $AFB\sphericalangle$, ha F a CC_1 szakasz felezőpontja?

5. Palkó uzsonnára palacsintát készített barátainak. Az asztalon három tálon van palacsinta. Az elsőn 8 darab túrós, 6 darab diós, és 10 darab lekváros van, a másodikon 12 darab túrós, 10 darab diós, és 8 darab lekváros, a harmadikon 8 darab diós, 12 darab lekváros és néhány túrós.

a) Palkó egyik barátja, Peti, véletlenszerűen vett mindegyik tálról egy-egy palacsintát. Tudjuk, hogy a Peti által választott három palacsinta $\frac{3}{25}$ valószínűséggel volt azonos ízesítésű. Hány túrós palacsinta volt a harmadik tálon?

b) A harmadik tálon levő túrós palacsinták számától függően milyen határok közt változhat annak a valószínűsége, hogy Peti három azonos ízesítésű palacsintát vett ki? (Feltesszük, hogy a házigazda csak a harmadik tálon lévő túrós palacsinták számát változtatja.)

6. Az ABC háromszög B és C csúcsainál fekvő belső szögfelezők az AC, illetve AB oldalt a B_1, illetve C_1 pontokban metszik. Rajzoljuk meg az A csúcson keresztül a külső szögfelező e egyenest. A B_1 ponton át a CC_1 szögfelezővel, a C_1 ponton át a BB_1 szögfelezővel párhuzamos egyeneseket húzunk, amelyek az e egyenest a P, illetve a Q pontokban metszik. Bizonyítsa be, hogy a $BCQP$ négyszög csúcsai egy körön helyezkednek el!

Második forduló

1. Oldja meg a valós számok legbővebb részhalmazán a

$$\left(\frac{2009}{2010}\right)^{\log_{2010} \log_{\frac{1}{2009}} \left(x - \frac{2010}{2009}\right)} < 1$$

egyenlőtlenséget!

2. Az ABC háromszög A csúcsból induló belső szögfelezője a K pontban metszi a BC oldalt. Az ABK háromszög belülírt körének és az ABC háromszög körülírt körének a középpontja egybeesik. Mekkorák az ABC háromszög szögei?

3. Mutassa meg, hogy ha az n, m természetes számokra

$$f(n+m) = f(n) + f(m) + 1 \quad \text{és} \quad f(1) = 2$$

teljesül, akkor az $f(1); f(2); f(3); \ldots; f(n)$ számok számtani sorozatot alkotnak! Számítsa ki a számtani sorozat első 2010 tagjának összegét!

4. Oldja meg az

$$|x - 4y + 1| + |y - 3x - 2| + |x + y + 2| + |x + 2y + 3| = 4$$

egyenletet, ha $x \in \mathbb{Z}$ és $y \in \mathbb{Z}$!

5. Egy 12 oldalú konvex sokszög belsejében 1000 pontot helyeztünk el úgy, hogy a sokszög 12 csúcsa, valamint ezek a felvett pontok – összesen 1012 pont – közül semelyik három nem illeszkedik egy egyenesre. Maximálisan hány olyan háromszöget készíthetünk, amelynek mindhárom csúcsa az 1012 pont közül kerül ki?

Harmadik (döntő) forduló

1. Oldja meg a valós számok halmazán a

$$\frac{2\cos 2x + 2\sin^2 x}{2\cos^4 x - 2\cos^2 x + 3\sin^2 x} + \frac{13\cos^2 x}{2\cos^4 x + 4\cos^2 x + 3\sin^2 x} = 6$$

egyenletet!

2. Legyen

$$a_n = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right],$$

ahol n pozitív egész szám. Bizonyítsa be, hogy a sorozat minden tagja egész szám!

3. Az ABC háromszögben $BAC\sphericalangle = 90^\circ$, $BC = a$, $CA = b$,
$AB = c$ és a háromszög K-val jelölt kerületére fennáll, hogy $K = \dfrac{a+b}{c}$.

$a)$ Számítsa ki $\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}$ értékét a K függvényében (ahol $\beta = CBA\sphericalangle$)!

$b)$ K milyen értékeire lesz a β szög az ABC háromszög legkisebb szöge?

II. kategória: Általános matematika tantervű gimnáziumok

Első (iskolai) forduló

1. Adott a következő polinom:

$$P(x) = x^2 + (x+2)^2 + (x+4)^2 + \ldots + (x+2008)^2 - \\ - (x+1)^2 - (x+3)^2 - \ldots - (x+2009)^2.$$

Mely valós x értékek esetén teljesül, hogy $P(x) > 0$?

2. Melyik az a legnagyobb, csupa különböző számjegyet tartalmazó pozitív egész szám, amelynek a számjegyeit tetszőleges sorrendben véve mindig prímszámot kapunk?

3. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$11^x + 14^x = 25^x - 2\left(\sqrt{154}\right)^x.$$

4. Az ABC háromszög területét az A csúcsból induló belső szögfelező $1:2$ arányban osztja. Milyen arányban osztja fel a háromszög területét az a magasságvonal, amely a háromszög legnagyobb szögű csúcsából indul, ha BC felezőmerőlegese a területet

(a) $1:3$;
(b) $1:2$

arányban osztja?

5. Az $\{1; 2; 3; \ldots; 2009\}$ halmazból legalább hány számot kell kiválasztani, hogy biztosan legyen a kiválasztott számok között két olyan, amelyek különbsége 4?

Második forduló

1. Adott az $x(x^2+y^2) + y(x^2+y^2) - 4x - 4y = 0$ egyenletű alakzat. Ennek az alakzatnak melyik pontja van legközelebb a $P\left(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{5}{2}\right)$ ponthoz?

2. Bizonyítsuk be, hogy 55 darab egymást követő egész szám négyzetének összege nem lehet négyzetszám.

3. Egy háromszög belsejébe helyezzünk el három olyan kört, amelyek érintik a háromszög két-két oldalát, továbbá kívülről érintik a háromszög beírt körét. Bizonyítsuk be, hogy e három kör sugarának összege nem kisebb a beírt kör sugaránál.

4. Hány megoldása van a következő egyenletnek?

$$2009 = \frac{\{x\}[x]}{x}.$$

$[x]$ az x valós szám egészrésze, az x-nél nem nagyobb egészek közül a legnagyobb.
$\{x\}$ az x valós szám törtrésze, értéke $\{x\} = x - [x]$.

Harmadik (döntő) forduló

1. Az a, b és c valós paraméterekre teljesül, hogy $2a^2+2+3b+6c=0$. Igazoljuk, hogy az $\left(a^2+1\right)x^2+bx+c=0$ egyenletnek van egynél kisebb, pozitív gyöke.

2. Az $ABCD$ tetraéderben $AB=BC=CA$. Bizonyítsuk be, hogy amennyiben $DAB\sphericalangle=DBC\sphericalangle=DCA\sphericalangle$, akkor $DA=DB=DC$.

3. Egy társas összejövetelen n ember vett részt. A társaság tagjai közül időnként leült három ember egy ultipartira. Hazamenetelkor megállapították, hogy bármely három ember legfeljebb egy partiban játszott együtt és bármely két ember pontosan két partiban vett részt együtt. Milyen n értékekre lehetséges ez, ha $3<n<9$?

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumok

Első (iskolai) forduló

1. Igazoljuk, hogy egy 2009 csúcsú teljes gráf élei megszámozhatók az $1,2,\ldots,\binom{2009}{2}$ számokkal úgy, hogy az egy csúcsba befutó élek számainak az összege semelyik két csúcsnál se legyen azonos.

2. Szerkesszünk háromszöget, ha ismert egy oldala, továbbá a beírt és a körülírt kör sugara. (Feltesszük, hogy létezik a megadott adatokkal háromszög, így a megoldhatóság feltételét nem kell vizsgálni, csak a megoldások számát.)

3. Oldjuk meg a $(2x+2)(5-2x)(4x^2+8x+11)=10(2x+3)^2$ egyenletet a valós számok körében.

4. Egy pozitív egész számot négyzetteljesnek nevezünk, ha a törzstényezős felbontásában minden prím legalább a második hatványon szerepel. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sokszor lesz két szomszédos szám mindegyike négyzetteljes.

5. Egységnyi területű háromszögben helyezzünk el két egymásba nem nyúló körlemezt úgy, hogy együtt minél nagyobb területet fedjenek le. Az egységnyi területű háromszögek közül milyen alakú háromszög esetén lesz ez a lefedett terület a legnagyobb?

Második (döntő) forduló

1. Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan derékszögű háromszög van, amelyben az oldalhosszak relatív prím egész számok, és az átfogó hosszából bármelyik befogó hosszát levonva egy-egy köbszámot kapunk.

2. Az ABC háromszög szögei $\pi/7$, $2\pi/7$, $4\pi/7$. A háromszög szögfelezői a szemközti oldalakat az A_1, B_1, C_1 pontokban metszik. Mutassuk meg, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög egyenlő szárú.

3. Egy k élhosszúságú kocka három egy csúcsba futó lapját teljesen le akarjuk ragasztani k^2 darab 3×1 méretű címkével. Milyen k-ra lehet ezt megtenni?