I. rész

1. *Egy kocka élének hossza centiméterben mérve egész szám. A kocka felületét pirosra festettük, majd az oldallapjaival párhuzamos vágásokkal* 1 cm *élű kiskockákra daraboltuk.*

a) Hány centiméter volt a kocka éle, ha a pontosan egy festett lapú kiskockák száma megegyezik a festetlen kiskockák számával?

b) Hány olyan különböző méretű kocka létezik, amelyből 0,5 *és* 0,6 *közé eső valószínűséggel választhatunk ki festetlen kiskockát? (A kiskockák kiválasztásának valószínűségét vegyük egyenlőnek.)* (*11 pont*)

Megoldás. *a*) Legyen a kocka éle x cm ($x \in \mathbb{Z}^+$). A festetlen kiskockák száma: $(x-2)^3$. A pontosan egy festett lapú kiskockák száma: $6(x-2)^2$.

Tudjuk, hogy

$$(x-2)^3 = 6(x-2)^2, \qquad (x-2)^2(x-8) = 0.$$

Az $x_1 = 2$ nem megoldása a feladatnak. Az $x_2 = 8$ az egyedüli megoldás.

A kocka éle 8 cm.

b) Legyen a keresett valószínűség p. Tudjuk, hogy $0{,}5 \le p \le 0{,}6$, azaz:

$$0{,}5 \le \frac{(x-2)^3}{x^3} \le 0{,}6, \quad (x \in \mathbb{Z}^+).$$

$$\sqrt[3]{0{,}5} \cdot x + 2 \ge x \ge \sqrt[3]{0{,}6} \cdot x + 2,$$

amiből századpontossággal kapjuk, hogy: $9{,}69 \le x \le 12{,}77$.

Tehát az x lehetséges értékei: 10, 11, 12. Vagyis 3-féle megfelelő kocka létezik.

2. *Bizonyítsuk be, hogy minden n természetes szám esetén*

a) az $n^5 - 5n^3 + 4n + 1$ szám 1-re végződik;

b) $5 \mid 2^{4n+1} + 3$. (*12 pont*)

Megoldás. *a*) Az $n^5 - 5n^3 + 4n + 1$ kifejezés pontosan akkor végződik 1-re, ha az $n^5 - 5n^3 + 4n$ kifejezés 0-ra végződik, azaz osztható 10-zel. Végezzük el a következő átalakításokat:

$$n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^4 - 5n^2 + 4) = n(n^2-1)(n^2-4) =$$
$$= n(n+1)(n-1)(n+2)(n-2).$$

A fenti kifejezés öt egymás utáni természetes szám szorzata, tehát biztosan van a tényezők között 2-vel, illetve 5-tel osztható.

Így a kifejezés minden n természetes szám esetén osztható 10-zel.

b) A 2 hatványai sorban a következő számokra végződnek: 2, 4, 8, 6, 2, 4, … stb., vagyis a $4n+1$-edik hatvány mindig 2-re végződik, így a kifejezés utolsó számjegye mindig 5 lesz. Vagyis a kifejezés valóban minden n természetes szám esetén osztható 5-tel.

3. *Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget:*

$$\log_{x+3}(x^2 - 9x - 10) \le \log_{x+3} 12.$$

(*14 pont*)

Megoldás. Meghatározzuk az egyenlőtlenség értelmezési tartományát.

$$x^2 - 9x - 10 > 0, \quad (x+1)(x-10) > 0, \quad \text{azaz} \quad x < -1 \cup 10 < x.$$

$$x + 3 > 0, \quad \text{azaz} \quad -3 < x.$$

$$x + 3 \ne 1, \quad \text{azaz} \quad x \ne -2.$$

Tehát $x \in]-3; -2[\cup]-2; -1[\cup]10; \infty[$.

Ha $x \in]-3; -2[$, akkor a logaritmus függvény csökkenő, ezért:

$$x^2 - 9x - 10 \ge 12, \quad x^2 - 9x - 22 \ge 0, \quad (x+2)(x-11) \ge 0,$$

vagyis: $x \in]-\infty; -2] \cup [11; \infty[$. Tehát ebben az esetben a megoldás: $x \in]-3; -2[$.

Ha $x \in]-2;-1[$, akkor a logaritmus függvény növekvő, ezért:

$$x^2 - 9x - 10 \le 12, \quad x^2 - 9x - 22 \le 0, \quad (x+2)(x-11) \le 0,$$

vagyis: $x \in [-2; 11]$. Tehát ebben az esetben a megoldás: $x \in]-2; -1]$.

Ha $x \in]10; \infty[$, akkor a logaritmus függvény növekvő, ezért:

$$x^2 - 9x - 10 \le 12,$$

vagyis: $x \in [-2; 11]$. Tehát ebben az esetben a megoldás: $x \in]10; 11]$.

Mindent egybevetve a feladat megoldása: $x \in]-3; -2[\cup]-2; -1[\cup]10; 11]$.

4. *a) Egy növekvő számtani sorozat első, negyedik és tizedik tagja egy mértani sorozat első három tagja. A számtani sorozat nyolcadik tagja* 10. *Határozzuk meg a mértani sorozat első tagját.*

b) A 3, 4, 5, 6 *számjegyekből képezzünk véletlenszerűen egy csupa különböző számjegyből álló négyjegyű számot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kapott szám* 4*-gyel osztható?* (*14 pont*)

Megoldás. *a*) Jelöljük a számtani sorozat tagjait $a_1, a_2, \ldots, a_n$-nel. Tudjuk, hogy $a_4 = a_1 + 3d$, $a_{10} = a_1 + 9d$, $a_8 = a_1 + 7d = 10$, vagyis $a_1 = 10 - 7d$.

A mértani sorozat tulajdonsága miatt:

$$\frac{a_1 + 3d}{a_1} = \frac{a_1 + 9d}{a_1 + 3d}, \qquad \frac{10 - 4d}{10 - 7d} = \frac{10 + 2d}{10 - 4d},$$

amiből kapjuk:

$$30d^2 - 30d = 0, \qquad 30d(d-1) = 0.$$

Az egyenlet gyökei: $d_1 = 0$ (ez a feladatnak nem megoldása, mivel a sorozat növekvő), $d_2 = 1$.

Vagyis a mértani sorozat első tagja: $a_1 = 10 - 7d = 3$.

b) A 3, 4, 5, 6 számjegyekből képezhető különböző számjegyekből álló négyjegyű számok száma: $4! = 24$. A néggyel osztható számok utolsó két számjegye, mint kétjegyű szám osztható néggyel, így a szóba jöhető számok 36, 56 vagy 64-re végződhetnek. Vagyis a kedvező esetek száma 6 (mert mindhárom esetben a maradék két számjegy kétféleképpen írható a szám elejére). A keresett valószínűség:

$$p = \frac{6}{24} = 0{,}25.$$

II. rész

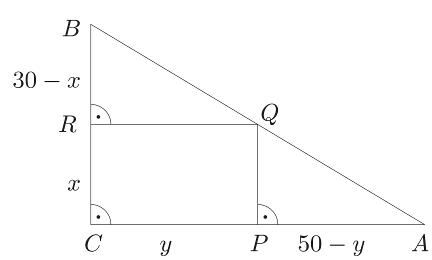
5. *Egy derékszögű háromszög alakú saroktelekre téglalap alapterületű házat tervezünk úgy, hogy annak két oldala az utcával párhuzamos legyen. A telek két merőleges oldalának hossza* 50 m *és* 30 m. *Hogyan válasszuk meg a ház oldalainak hosszát, ha a lehető legnagyobb alapterületű házat szeretnénk megtervezni?* (*16 pont*)

Megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit. Az APQ és QRB háromszögek hasonlósága miatt fennáll a következő aránypár:

$$\frac{30 - x}{x} = \frac{y}{50 - y}.$$

Rendezve az egyenlőséget:

$$y = \frac{150 - 5x}{3}.$$



A maximális területű téglalapot keressük:

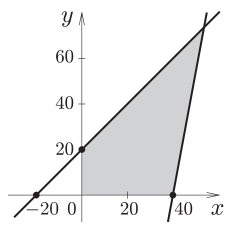
$$t(x) = xy = \frac{x(150-5x)}{3} = -\frac{5}{3}x^2 + 50x.$$

Keressük a $t(x)$ másodfokú függvény szélsőértékét.

A függvény zérushelyei: $x_1 = 0$, $x_2 = 30$. A másodfokú függvény képének szimmetriája miatt a szélsőérték $x = 15$-nél van. Mivel a főegyüttható negatív, ezért itt maximuma van.

Vagyis a ház oldalainak hossza: $x = 15$ m, $y = 25$ m.

6. *A derékszögű koordinátarendszer első síknegyedéből az* ábrán *látható két egyenes egy* 2010 *egység területű négyszöget vág le.*



a) Határozzuk meg a két egyenes metszéspontjának koordinátáit.

b) Írjuk fel az egyenesek egyenletét. (*16 pont*)

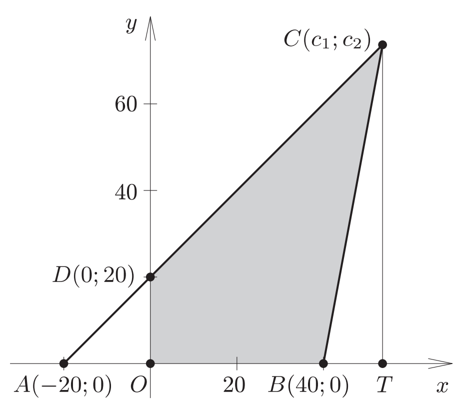
Megoldás. Az *ábra* jelöléseit használjuk. Tudjuk, hogy:

$$t_{ABC} = \frac{60 \cdot c_2}{2} = 30 \cdot c_2,$$

$$t_{AOD} = \frac{20 \cdot 20}{2} = 200,$$

$$t_{OBCD} = t_{ABC} - t_{AOD} = 30 \cdot c_2 - 200 = \\ = 2010.$$

Vagyis: $c_2 = \dfrac{221}{3}$.



Mivel ATC egyenlőszárú derékszögű háromszög, így $AT = CT$, azaz $20 + c_1 = \dfrac{221}{3}$. Vagyis: $c_1 = \dfrac{161}{3}$.

A két egyenes metszéspontja: $C\left(\dfrac{161}{3}; \dfrac{221}{3}\right)$.

b) Az AC egyenes egyenlete könnyen felírható, hiszen a meredeksége 1, az y tengelyt pedig a $D(0;20)$ pontban metszi: $y = x + 20$. A BC egyenes egyenlete is felírható, mert ismerjük két pontjának koordinátáit. Használjuk a két ponton áthaladó egyenes egyenletét:

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1).$$

Írjuk be az ismert pontok koordinátáit:

$$y \cdot \left(\frac{161}{3} - 40\right) = (x - 40) \cdot \frac{221}{3}, \quad 221x - 41y = 8840.$$

Tehát az egyenesek egyenlete: $y = x + 20$ és $221x - 41y = 8840$.

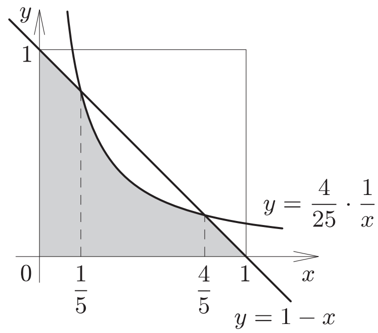
7. *Két számot választunk véletlenszerűen a* $[0; 1]$ *számközben. Mi a valószínűsége annak, hogy összegük* 1*-nél, szorzatuk pedig* $\frac{4}{25}$*-nél kisebb lesz?* (*16 pont*)

Megoldás. Jelöljük a vizsgált eseményt A-val. A két véletlenszerűen választott x és y számnak a sík egységnégyzetének $(x; y)$ koordinátájú pontját feleltetjük meg.

Az A esemény fennáll, ha az

$$x + y < 1 \quad \text{és} \quad xy < \frac{4}{25}$$

egyenlőtlenségek egyidejűleg teljesülnek. Az ezeknek az egyenlőtlenségeknek eleget tevő pontok az egységnégyzet satírozott részére esnek. Ennek a résznek a területét kell kiszámítanunk.



Meghatározzuk az $x + y = 1$ egyenes és az $xy = \frac{4}{25}$ hiperbola metszéspontjait. Az $y = 1 - x$ helyettesítéssel kapjuk:

$$x(1 - x) = \frac{4}{25}, \qquad x^2 - x + \frac{4}{25} = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldásai: $x_1 = 0{,}8$, $x_2 = 0{,}2$. A megfelelő ordinátákat visszahelyettesítéssel kapjuk: $y_1 = 0{,}2$, $y_2 = 0{,}8$. A bevonalkázott részben a $[0; 0{,}2]$ és a $[0{,}8; 1]$ intervallumok fölötti részek együttesen $0{,}2$ nagyságú területet adnak.

A $[0{,}2; 0{,}8]$ intervallumon az $y = 0{,}16 \cdot \frac{1}{x}$ hiperbola alatti rész területét kell kiszámítani:

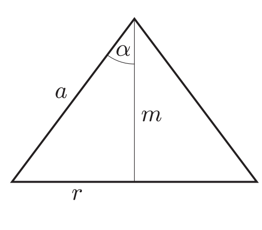
$$0{,}16 \cdot \int_{0{,}2}^{0{,}8} \frac{1}{x}\, dx = 0{,}16 \cdot \big[\ln|x|\big]_{0{,}2}^{0{,}8} = 0{,}16 \cdot (\ln 0,8 - \ln 0,2) = 0,16 \cdot \ln 4.$$

Az A esemény szempontjából kedvező rész területe: $t = 0{,}2 + 0{,}16 \cdot \ln 4$. Az egységnégyzet területe: $T = 1$, így az A esemény valószínűsége:

$$P(A) = \frac{t}{T} = 0{,}2 + 0{,}16 \cdot \ln 4 \approx 0{,}42.$$

Tehát kb. 0,42 a valószínűsége annak, hogy a véletlenszerűen választott számok eleget tesznek a feltételeknek.

8. *Egy forgáskúp és egy henger alaplapja közös. A kúp csúcsa a henger fedőlapjának középpontja. Határozzuk meg a kúp tengelyének és alkotójának hajlásszögét, ha a henger és a kúp felszínének aránya* $7 : 4$. (*16 pont*)



Megoldás. Készítsük el a kúp tengelymetszetéről a vázlatrajzot. Az *ábra* jelölései és a felszínekre vonatkozó összefüggések alapján:

$$\frac{A_{\text{henger}}}{A_{\text{kúp}}} = \frac{2r^2\pi + 2r\pi m}{r^2\pi + r\pi a} = \frac{7}{4}.$$

Egyszerűsítés után kapjuk, hogy

$$\frac{2(r + m)}{r + a} = \frac{7}{4}, \quad \text{amiből} \quad \frac{1 + \frac{m}{r}}{1 + \frac{a}{r}} = \frac{7}{8}.$$

Tudjuk, hogy $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{m}{r}$ és $\dfrac{1}{\sin\alpha} = \dfrac{a}{r}$. Ezeket behelyettesítve és felhasználva, hogy $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, a következőt kapjuk:

$$\frac{1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{1+\frac{1}{\sin\alpha}} = \frac{7}{8}\,.$$

Rendezve az egyenletet:

$$\sin\alpha + 8\cos\alpha = 7,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1^2+8^2}}\sin\alpha + \frac{8}{\sqrt{1^2+8^2}}\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{1^2+8^2}}\,,$$

amit közelítő értékekkel így írhatunk:

$$\sin\alpha\cos 82{,}87^\circ + \cos\alpha\sin 82{,}87^\circ = 0{,}8682.$$

Alkalmazzuk a $\sin(\alpha+\beta)$-ra vonatkozó addíciós tételt:

$$\sin(82{,}87^\circ + \alpha) = \sin 60{,}25^\circ.$$

Ennek a trigonometrikus egyenletnek a megoldása:

$$\alpha_1 = -22{,}62^\circ + k_1\cdot 360^\circ,\quad \text{ahol}\quad k_1\in\mathbb{Z};$$

$$\alpha_2 = 36{,}88^\circ + k_2\cdot 360^\circ,\quad \text{ahol}\quad k_2\in\mathbb{Z}.$$

Innen a feladat egyedüli megoldása: $\alpha = 36{,}88^\circ$.

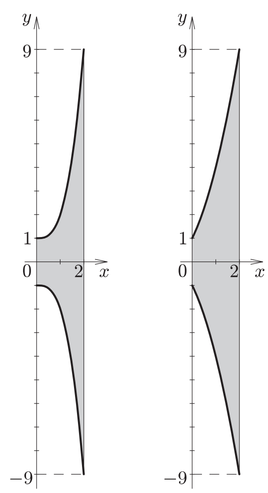
Vagyis a kúp alkotójának és magasságának hajlásszöge: $36{,}88^\circ$.

9. *A* $[0;2]$ *intervallumon értelmezett* $f(x) = x^3+1$ *és* $g(x) = (x+1)^2$ *függvények grafikonját megforgatjuk az x tengely körül.*

a) Számítsuk ki az így kapott forgástestek alap- és fedőlapjának területét.

b) Számítsuk ki a két test térfogatát. (*16 pont*)

Megoldás. Lerajzoljuk a függvények *grafikonját,* és a megforgatás után kapott testek síkmetszetét.



$f(x) = x^3+1$ $\qquad$ $g(x) = (x+1)^2$

a) A két test alap és fedőlapja is azonos méretű, hiszen $f(0) = g(0) = 1$, $f(2) = g(2) = 9$. Vagyis az alaplapok sugara 1, a fedőlapok sugara 9. Az alaplap területe: $t = \pi$, a fedőlap területe: $T = 81\pi$.

b) Használjuk a

$$V = \pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$$

térfogatképletet:

$$V_1 = \pi \int_0^2 (x^3+1)^2 \, dx = \pi \int_0^2 (x^6+2x^3+1) \, dx = \pi \left[\frac{x^7}{7} + 2 \cdot \frac{x^4}{4} + x \right]_0^2 =$$

$$= \pi \left(\frac{2^7}{7} + 2 \cdot \frac{2^4}{4} + 2 \right) \approx 88{,}86.$$

$$V_2 = \pi \int_0^2 (x+1)^4 \, dx = \pi \int_0^2 (x^4+4x^3+6x^2+4x+1) \, dx =$$

$$= \pi \left[\frac{x^5}{5} + 4 \cdot \frac{x^4}{4} + 6 \cdot \frac{x^3}{3} + 4 \cdot \frac{x^2}{2} + x \right]_0^2 = \pi \left[\frac{2^5}{5} + 4 \cdot \frac{2^4}{4} + 6 \cdot \frac{2^3}{3} + 4 \cdot \frac{2^2}{2} + 2 \right]_0^2 \approx$$

$$\approx 152{,}05.$$