I. rész

1. *Adott az (a_n) számtani sorozat. Igazoljuk, hogy a $b_n = a_{n+1}^2 - a_n^2$ képlettel értelmezett sorozat is számtani sorozat.* (*11 pont*)

Megoldás. A (b_n) sorozat bármely két szomszédos elemének különbsége állandó kell, hogy legyen. Tudjuk, hogy

$$b_n = (a_n + d)^2 - a_n^2 = 2a_n d + d^2,$$
$$b_{n+1} = 2a_{n+1}d + d^2 = 2(a_n + d)d + d^2 = 2a_n d + 3d^2.$$

Ekkor $b_{n+1} - b_n = 2d^2$, ami valóban állandó.

2. *Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:*

$$\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{x+1}{x-2}.$$

(*12 pont*)

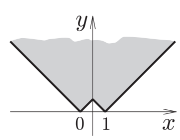
Megoldás. Meghatározzuk az egyenlet értelmezési tartományát: $x \geq -1$, de $x \neq 0$, $x \neq 2$.
Legyen $\sqrt{x+1} = a$, ekkor az egyenlet:

$$\frac{a+2}{a-1} = \frac{a^2}{a^2-3},$$

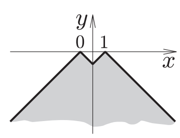
amiből $a_1 = -1$, $a_2 = 2$. A $\sqrt{x+1} = -1$ nem lehet. A $\sqrt{x+1} = 2$ egyenletből kapjuk az egyenlet egyedüli megoldását, és ez az $x = 3$.

3. *Melyek azok a $P(x;y)$ pontok, amelyekre teljesül, hogy $\big||x|-1\big| - |y| \leq 0$?* (*14 pont*)

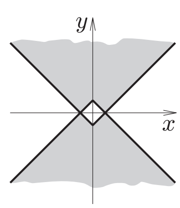
Megoldás. Rendezzük át az egyenlőtlenséget: $\big||x|-1\big| \leq |y|$.
Ha $y \geq 0$, akkor $\big||x|-1\big| \leq y$. Ezt koordináta-rendszerben ábrázoljuk:



Ha $y < 0$, akkor $\big||x|-1\big| \leq -y$, azaz $-\big||x|-1\big| \geq y$. Ezt is ábrázoljuk koordináta-rendszerben:



A két eset egyesítése adja a megoldást:



4. *Egy urnában 7 piros és 9 kék golyó van. Egymás után kihúzunk ötöt úgy, hogy minden húzás után visszatesszük a húzott golyót. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a kihúzott golyók között több a piros, mint a kék?* (*14 pont*)

Megoldás. Az összes eset száma: 16^5. Háromféle eset lesz megfelelő:
I. eset: Ha 3 pirosat és 2 kék golyót húzunk. Ez $\frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot 7^3 \cdot 9^2$ esetben valósul meg.
II. eset: Ha 4 pirosat és 1 kék golyót húzunk. Ez $\frac{5!}{4!\cdot 1!}\cdot 7^4 \cdot 9^1$ esetben valósul meg.
III. eset: Ha 5 pirosat húzunk. Ez 7^5 esetben valósul meg.
Ezek alapján a keresett valószínűség:

$$\frac{\frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot 7^3\cdot 9^2 + \frac{5!}{4!\cdot 1!}\cdot 7^4\cdot 9^1 + 7^5}{16^5} \approx 0{,}3840.$$

II. rész

5. *Egy távközlési társaság* 13 000 *előfizetővel rendelkezik* 6500 Ft*-os havidíj mellett. A piackutatások azt mutatják, hogy ha csökkentenék a havidíjat* 100 Ft*-tal, akkor* 250 *új előfizetőhöz jutnának, és ez igaz lenne minden újabb* 100 Ft*-tal történő csökkentésre. (A havidíj összege ennél a társaságnál mindig* 100*-zal osztható szám.) Mekkora havi előfizetési díj mellett lenne, a piackutatások szerint, a legnagyobb bevétele a társaságnak?* (*16 pont*)

Megoldás. Az $f(x) = (6500 - 100\,x)(13\ 000 + 250\,x)$ hozzárendeléssel megadott függvény írja le a társaság bevételét, ahol $0 \le x < 65$ és $x \in \mathbb{Z}$.

A függvényt a következő alakra hozhatjuk:

$$f(x) = -25\,000(x-65)(x+52).$$

Az f másodfokú függvény szélsőértéke $x = 6{,}5$-nél van, és ez maximumhely. Tudjuk, hogy x csak egész szám lehet. A másodfokú függvény képének tengelyes szimmetriájából következik, hogy az $x_1 = 6$ és $x_2 = 7$ helyeken a függvény értéke egyenlő lesz.

Vagyis a legkedvezőbb előfizetési díj a társaság részére az 5900 Ft vagy az 5800 Ft lenne.

6. *Legyen A_1, B_1, C_1 rendre az ABC háromszög BC, CA, AB oldalán egy-egy tetszőleges pont. Legyen $l_a = AA_1$, $l_b = BB_1$, $l_c = CC_1$. Bizonyítsuk be, hogy*

$$\frac{1}{2} < \frac{l_a + l_b + l_c}{a+b+c} < \frac{3}{2}\,.$$

(*16 pont*)

Megoldás. Használjuk a háromszög-egyenlőtlenségeket: $l_a > b - A_1C$, $l_a > c - A_1B$. Ezeket összeadva kapjuk:

$$2l_a > b + c - a.$$

Ugyanígy adódik: $2l_b > a + c - b$, $2l_c > a + b - c$. Ezt a három egyenlőtlenséget összeadva és osztva kettővel:

$$l_a + l_b + l_c > \frac{1}{2}(a+b+c),$$

amiből kapjuk az egyik bizonyítandó összefüggést:

$$\frac{1}{2} < \frac{l_a + l_b + l_c}{a+b+c}.$$

A továbbiakban is a háromszög-egyenlőtlenségeket használjuk: $l_a < c + A_1B$, $l_a < b + A_1C$. Ezeket összeadva kapjuk:

$$2l_a < a + b + c,$$

Ugyanígy adódik: $2l_b < a + b + c$, $2l_c < a + b + c$. Ezt a három egyenlőtlenséget összeadva és osztva kettővel:

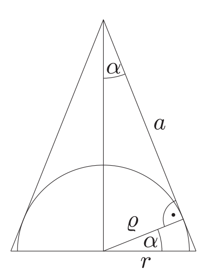
$$l_a + l_b + l_c < \frac{3}{2}(a+b+c),$$

amiből kapjuk a másik bizonyítandó összefüggést:

$$\frac{l_a + l_b + l_c}{a+b+c} < \frac{3}{2}.$$

7. *Egy egyenes körkúpba írjunk bele egy félgömböt úgy, hogy az a körlapjával illeszkedjék a kúp alapkörének síkjára, gömbfelülete pedig érintse a kúp palástját. A kúp felszíne úgy aránylik a félgömb görbült felületének a felszínéhez, mint* 18 : 5. *Mekkora a kúp nyílásszöge?* (*16 pont*)

Megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit (az ábrán a kúp tengelyére illeszkedő síkmetszetet látjuk). Tudjuk, hogy $a = \dfrac{r}{\sin\alpha}$, $\varrho = r\cos\alpha$, ahol $0 < \alpha < 90°$.



Legyen A a kúp felszíne, B pedig a félgömb görbe felületének felszíne, ekkor

$$\frac{A}{B} = \frac{r\left(\frac{r}{\sin\alpha} + r\right)\pi}{2r^2\pi\cos^2\alpha} = \frac{18}{5},$$

amiből kapjuk:

$$\frac{1+\sin\alpha}{2\sin\alpha\cos^2\alpha} = \frac{18}{5}.$$

Felhasználjuk, hogy $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ és $\sin\alpha + 1 \neq 0$:

$$\frac{1}{2\sin\alpha(1-\sin\alpha)} = \frac{18}{5}, \qquad 36\sin^2\alpha - 36\sin\alpha + 5 = 0,$$

ahonnan $\sin\alpha_1 = \dfrac{5}{6}$, $\sin\alpha_2 = \dfrac{1}{6}$.

Visszakeresve a két szöget, a kúp nyílásszöge: 112,89° vagy 19,19°.

8. *Bálint és Jonatán a következő játékot játsszák. Dobnak két kockával; ha a dobott számok szorzata vagy összege hárommal osztható, akkor Bálint, egyébként Jonatán nyeri a játékot. Kinek van nagyobb esélye a győzelemre?* (*16 pont*)

Megoldás. Megadunk két eseményt:
A: a két szám szorzata osztható hárommal.
B: a két szám összege osztható hárommal.

Tudjuk, hogy $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Nézzük a kockadobások kimeneteleit, amikor az összeget figyeljük:

dobások	1	2	3	4	5	6
1	2	**3**	4	5	**6**	7
2	**3**	4	5	**6**	7	8
3	4	5	**6**	7	8	**9**
4	5	**6**	7	8	**9**	10
5	**6**	7	8	**9**	10	11
6	7	8	**9**	10	11	**12**

A 36 eset között 12 olyan van, amikor a dobott két szám összege hárommal osztható, ezért

$$P(B) = \frac{12}{36} = \frac{3}{9}.$$

Nézzük a kockadobások kimeneteleit, amikor a szorzatot figyeljük:

dobások	1	2	3	4	5	6
1	1	2	**3**	4	5	**6**
2	2	4	**6**	8	10	**12**
3	**3**	**6**	**9**	**12**	**15**	**18**
4	4	8	**12**	16	20	**24**
5	5	10	**15**	20	25	**30**
6	**6**	**12**	**18**	**24**	**30**	**36**

A 36 eset között 20 olyan van, amikor a dobott két szám szorzata hárommal osztható, ezért $P(A) = \dfrac{20}{36} = \dfrac{5}{9}$.

A 36 eset között 4 olyan van, amikor az összeg és a szorzat is osztható hárommal, ezért $P(AB) = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$.

Bálint nyerési esélye: $P(A+B) = \dfrac{3+5-1}{9} = \dfrac{7}{9}$, Jonatáné: $1 - P(A+B) = \dfrac{2}{9}$. Vagyis Bálint nyerési esélye nagyobb.

9. *Mely valós p számokra igaz, hogy minden valós x számra teljesül a*

$$\frac{2x^2+2x+3}{x^2+x+1} \leq p$$

egyenlőtlenség? (*16 pont*)

Megoldás. Mivel

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4},$$

azért a nevező minden valós x estén pozitív. Szorozzunk be ezzel a nevezővel, ekkor kapjuk: $0 \leq (p-2)x^2+(p-2)x+p-3$. Ha $p=2$, akkor az egyenlőtlenség egyetlen valós számra sem igaz.

Egyébként $p>2$, és a diszkrimináns nem pozitív, azaz

$$(p-2)^2-4(p-2)(p-3) \leq 0, \qquad (p-2)(-3p+10) \leq 0.$$

Mivel $p>2$, ez akkor és csak akkor teljesül, ha $p \geq \dfrac{10}{3}$.