I. rész

1. Egy kocka élének hossza centiméterben mérve egész szám. A kocka felületét pirosra festettük, majd az oldallapjaival párhuzamos vágásokkal 1 cm élű kiskockákra daraboltuk.

a) Hány centiméter volt a kocka éle, ha a pontosan egy festett lapú kiskockák száma megegyezik a festetlen kiskockák számával?

b) Hány olyan különböző méretű kocka létezik, amelyből 0,5 és 0,6 közé eső valószínűséggel választhatunk ki festetlen kiskockát? (A kiskockák kiválasztásának valószínűségét vegyük egyenlőnek.) (*11 pont*)

2. Bizonyítsuk be, hogy minden n természetes szám esetén

a) az $n^5 - 5n^3 + 4n + 1$ szám 1-re végződik;

b) $5 \mid 2^{4n+1} + 3$. (*12 pont*)

3. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget:

$$\log_{x+3}(x^2 - 9x - 10) \le \log_{x+3} 12.$$

(*14 pont*)

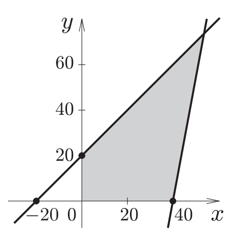
4. *a*) Egy növekvő számtani sorozat első, negyedik és tizedik tagja egy mértani sorozat első három tagja. A számtani sorozat nyolcadik tagja 10. Határozzuk meg a mértani sorozat első tagját.

b) A 3, 4, 5, 6 számjegyekből képezzünk véletlenszerűen egy csupa különböző számjegyből álló négyjegyű számot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kapott szám 4-gyel osztható? (*14 pont*)

II. rész

5. Egy derékszögű háromszög alakú saroktelekre téglalap alapterületű házat tervezünk úgy, hogy annak két oldala az utcával párhuzamos legyen. A telek két merőleges oldalának hossza 50 m és 30 m. Hogyan válasszuk meg a ház oldalainak hosszát, ha a lehető legnagyobb alapterületű házat szeretnénk megtervezni? (*16 pont*)

6. A derékszögű koordinátarendszer első síknegyedéből az *ábrán* látható két egyenes egy 2010 egység területű négyszöget vág le.



a) Határozzuk meg a két egyenes metszéspontjának koordinátáit.

b) Írjuk fel az egyenesek egyenletét. (*16 pont*)

7. Két számot választunk véletlenszerűen a $[0; 1]$ számközben. Mi a valószínűsége annak, hogy összegük 1-nél, szorzatuk pedig $\frac{4}{25}$-nél kisebb lesz? (*16 pont*)

8. Egy forgáskúp és egy henger alaplapja közös. A kúp csúcsa a henger fedőlapjának középpontja. Határozzuk meg a kúp tengelyének és alkotójának hajlásszögét, ha a henger és a kúp felszínének aránya 7 : 4. (*16 pont*)

9. A $[0; 2]$ intervallumon értelmezett $f(x) = x^3 + 1$ és $g(x) = (x+1)^2$ függvények grafikonját megforgatjuk az x tengely körül.

a) Számítsuk ki az így kapott forgástestek alap- és fedőlapjának területét.

b) Számítsuk ki a két test térfogatát. (*16 pont*)