

3. Szép sudoku megoldások

Célunk, hogy \mathcal{N} geometriai tulajdonságait felhasználva leírjuk a szép sudoku megoldásokat.

Definíció. Az $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ és $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ \mathcal{N} -beli elemek Hamming-távolsága, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ azon $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ indexek száma, melyekre $x_i \neq y_i$ teljesül.

Az így mért eltérést azért nevezik távolságnak, mert rendelkezik a geometriából ismert „szokásos” távolság legfontosabb tulajdonságaival. Például igaz a háromszög-egyenlőtlenség, azaz tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ vektorok Hamming-távolságára

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \geq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}).$$

A Hamming-távolságot persze nemcsak 4 hosszú vektorok esetén lehet értelmezni. Erről részletesen olvashatunk a lapunk 2007. májusi számában megjelent [2] cikkben, vagy a [3] könyv 13. fejezetében.

Tétel. Szép megoldás esetén bármely két ugyanazon számjegyet tartalmazó mezőhöz tartozó vektor Hamming-távolsága pontosan 3.

Bizonyítás. Először azt mutatjuk meg, hogy két ilyen mező távolsága legalább 3. Tegyük fel, hogy két mezőben ugyanaz a számjegy áll, a mezők távolsága pedig legfeljebb 2. Ez azt jelenti, hogy a két mezőhöz tartozó vektoroknak van két azonos koordinátájuk. Ez a két koordináta hat különböző párban fordulhat elő. Bármelyik párt is adjuk meg, az egyértelműen meghatároz egy sort (x_1 és x_2), vagy oszlopot (x_3 és x_4), vagy törött sort (x_2 és x_3), vagy törött oszlopot (x_1 és x_4), vagy kis négyzetet (x_1 és x_3), vagy pozíciót (x_2 és x_4). Vagyis az egyezés ellentmond a szép megoldás definíciójának.

Nézzünk most 9 olyan mezőt, melyekben ugyanaz a számjegy áll. A mezőknek megfelelő 9 vektorból $9 \times 8 = 72$ rendezett pár készíthető. Ezek páronkénti távolságainak összege az előzőek szerint legalább $72 \times 3 = 216$.

Ez a távolságösszeg az egyes koordinátákban fellépő eltérések összegéből adódik. Vizsgáljuk meg a vektorok első koordinátáit. Legyen az első koordináták közt e_0 darab 0, e_1 darab 1 és e_2 darab 2. Ekkor $e_0 + e_1 + e_2 = 9$, továbbá az első koordináták hozzájárulása a távolságösszeghez:

$$\begin{aligned} e_0(e_1 + e_2) + e_1(e_0 + e_2) + e_2(e_0 + e_1) &= e_0(9 - e_0) + e_1(9 - e_1) + e_2(9 - e_2) = \\ &= 9 \cdot (e_0 + e_1 + e_2) - (e_0^2 + e_1^2 + e_2^2) = 81 - (e_0^2 + e_1^2 + e_2^2). \end{aligned}$$

Viszont a számtani és a négyzetes közép közti egyenlőtlenség szerint

$$(1) \quad \sqrt{\frac{e_0^2 + e_1^2 + e_2^2}{3}} \geq \frac{e_0 + e_1 + e_2}{3} = 3,$$

azaz

$$e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 \geq 27.$$

Tehát az első koordináták eltéréseinek összege legfeljebb $81 - 27 = 54$. Ugyanezeket az egyenlőtlenségeket nyilván felírhatjuk a második, harmadik és negyedik koordinátákra is. Vagyis a távolságok összege legfeljebb $4 \times 54 = 216$.

Ez csak úgy lehet, ha a távolságösszeg pontosan 216, azaz bármely két vektor távolsága éppen 3. \square

Nevezzük jó halmaznak az \mathcal{N} olyan 9 elemű részhalmazait, melyekben bármely két elem Hamming-távolsága pontosan 3.

Következmény. Bármely jó halmaz 9 vektora közt minden $i = 1, 2, 3, 4$ és $j = 0, 1, 2$ esetén pontosan 3 olyan van, melynek az i -edik koordinátája j .

Bizonyítás. Jó halmaz esetén az előző tétel bizonyításában szereplő (1) egyenlőtlenségben egyenlőség áll, ezért $e_0 = e_1 = e_2 = 3$. Továbbá, az ennek megfelelő, a többi koordinátára vonatkozó egyenlőtlenségekben is egyenlőségnek kell teljesülnie, vagyis a 9 vektor minden koordinátájában 3-3 darab 0, 1 és 2 fordul elő. \square

Feladat. Mutassuk meg, hogy legfeljebb 9 \mathcal{N} -beli vektor adható meg úgy, hogy közülük bármely kettő Hamming-távolsága legalább 3.

A továbbiakban célunk a jó halmazok leírása.

Tétel. \mathcal{C} pontosan akkor jó halmaz, ha bármely \mathbf{x} -re $\mathcal{C} + \mathbf{x}$ is jó halmaz.

Bizonyítás. Bármely $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ vektorok esetén

$$d(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = d(\mathbf{y} + \mathbf{x}, \mathbf{z} + \mathbf{x})$$

¹A cikk elkészítését az NK 67867 és a K 81310 számú OTKA pályázat támogatta.

amiből azonnal adódik az állítás. \square

Tételünkéből következik, hogy minden jó halmaznak van olyan eltoltja, amely tartalmazza a $\mathbf{0}$ vektort. Tehát a továbbiakban elegendő az ilyen tulajdonságú jó halmazokat vizsgálnunk.

Tétel. *Ha egy jó halmazban benne vannak az egymástól különböző \mathbf{x} és \mathbf{y} vektorok, akkor a $2(\mathbf{x} + \mathbf{y})$ vektor is benne van.*

Bizonyítás. Mivel modulo 3 számolunk, azért

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} + 2(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{0}.$$

Tudjuk, hogy $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 3$. Tehát \mathbf{x} és \mathbf{y} pontosan egy koordinátában egyezik meg. Feltehetjük, hogy $x_1 = y_1 = a$. A jó halmazban még pontosan egy olyan \mathbf{z} vektor van, melyre $z_1 = a$ teljesül. Mivel $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = 3$, azért $i = 2, 3, 4$ esetén az \mathbf{x} , \mathbf{y} és \mathbf{z} vektorok i -edik koordinátái páronként különbözőek, azaz $\{x_i, y_i, z_i\} = \{0, 1, 2\}$. Ezért $x_i + y_i + z_i = 0 + 1 + 2 = 0$. S mivel $x_1 + y_1 + z_1 = a + a + a = 0$, azért $\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{0}$, tehát

$$\mathbf{z} = -(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = 2(\mathbf{x} + \mathbf{y}). \quad \square$$

Tétel. *Ha a \mathcal{C} jó halmazban benne van $\mathbf{0}$, valamint a lineárisan független \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorok, akkor \mathcal{C} egy sík, pontosabban*

$$\mathcal{C} = \mathcal{S}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{0}}.$$

Bizonyítás. Az előző tételt $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ és $\mathbf{y} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{y} = \mathbf{a}$ valamint $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ esetén alkalmazva kapjuk, hogy \mathcal{C} tartalmazza a $2(\mathbf{a} + \mathbf{b})$, $2\mathbf{a}$ és $2\mathbf{b}$ vektorokat. Mivel \mathbf{a} és \mathbf{b} lineárisan függetlenek, ezért $\mathbf{a} \neq 2\mathbf{b} \neq 2\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$. Tehát az előző tételt alkalmazhatjuk $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ és $\mathbf{y} = 2\mathbf{b}$, $\mathbf{x} = \mathbf{b}$ és $\mathbf{y} = 2\mathbf{a}$ valamint $\mathbf{x} = 2\mathbf{a}$ és $\mathbf{y} = 2\mathbf{b}$ választással is. Ezekből kapjuk, hogy \mathcal{C} tartalmazza a $2(\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) = 2\mathbf{a} + \mathbf{b}$, a $2(\mathbf{b} + 2\mathbf{a}) = 2\mathbf{b} + \mathbf{a}$ és a $2(2\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ vektorokat is. \square

Ezek után már meg tudjuk adni az összes jó halmazt.

Tétel. *Legyenek \mathbf{a} és \mathbf{b} lineárisan független vektorok. Ha teljesül, hogy $d(\mathbf{0}, \mathbf{a}) = d(\mathbf{0}, \mathbf{b}) = d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 3$, akkor $\mathcal{S}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{0}}$ jó halmaz.*

Bizonyítás. Azt kell megmutatnunk, hogy $\mathcal{S}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{0}}$ bármely két különböző elemének Hamming-távolsága pontosan 3. Mivel $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{0})$, azért elég azt megmutatnunk, hogy $\mathcal{S}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{0}}$ minden $\mathbf{0}$ -tól különböző elemének pontosan 3 nemnulla koordinátája van.

Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$. Mivel $d(\mathbf{0}, \mathbf{a}) = d(\mathbf{0}, \mathbf{b}) = 3$, ezért \mathbf{a} -nak is és \mathbf{b} -nek is pontosan egy koordinátája 0. Feltehetjük, hogy $a_1 = 0$. Ekkor $b_1 \neq 0$, mert ha $b_1 = 0$ lenne, akkor $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 3$ miatt $i = 2, 3, 4$ esetén $a_i \neq b_i$ lenne, s mivel ezen koordináták egyike sem 0, azért $\{a_i, b_i\} = \{1, 2\}$ is teljesülne. Ekkor viszont $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$, azaz $\mathbf{b} = 2\mathbf{a}$ lenne, ami ellentmond a feltételeinknek.

Tehát $b_1 \neq 0$. Feltehetjük, hogy \mathbf{b} egyetlen 0 koordinátája b_2 . Mivel $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 3$ és $a_1 \neq b_1$ valamint $a_2 \neq b_2$, azért az (a_3, b_3) és (a_4, b_4) párok közül az egyik két egyező, a másik pedig két különböző koordinátából áll. Továbbá tudjuk, hogy ezen koordináták egyike sem 0. Ezért feltehető, hogy $a_3 = b_3$ és $\{a_4, b_4\} = \{1, 2\}$, azaz $b_4 = 2a_4$. Ekkor minden $\mathbf{c} \in \mathcal{S}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{0}}$ esetén

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = (\alpha a_1 + \beta b_1, \alpha a_2 + \beta b_2, \alpha a_3 + \beta b_3, \alpha a_4 + \beta b_4) = \\ &= (\beta b_1, \alpha a_2, (\alpha + \beta)a_3, (\alpha + 2\beta)a_4). \end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy \mathbf{c} -nek pontosan egy koordinátája 0. Ha $\alpha = 0$, akkor $\beta \neq 0$. Tehát ekkor csak $c_2 = 0$. Ugyanígy kapjuk, hogy $\beta = 0$ esetén csak $c_1 = 0$. Ha $\alpha \neq 0$ és $\beta \neq 0$, akkor $c_1 \neq 0$ és $c_2 \neq 0$ nyilván teljesül. Ha továbbá $\alpha = \beta$, akkor

$$c_3 = (\alpha + \beta)a_3 = 2\alpha a_3 \neq 0,$$

mert $a_3 \neq 0$. Viszont $c_4 = (\alpha + 2\beta)a_4 = 3\alpha a_4 = 0$. Ha pedig $\alpha \neq \beta$, akkor $\beta = 2\alpha$, tehát $c_3 = (\alpha + \beta)a_3 = 3\alpha a_3 = 0$, viszont $c_4 = (\alpha + 2\beta)a_4 = \alpha a_4 \neq 0$. \square

Következmény. *A $\mathbf{0}$ vektort tartalmazó jó halmazok pontosan azok az $\mathcal{S}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{0}}$ síkok, melyekre teljesül, hogy $d(\mathbf{0}, \mathbf{a}) = d(\mathbf{0}, \mathbf{b}) = d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 3$.*

Tétel. *A $\mathbf{0}$ vektort tartalmazó jó halmazok száma 8.*

Bizonyítás. A jó halmaz pontosan 3 olyan vektort tartalmaz, melyek első koordinátája 0, ezek egyike a $\mathbf{0}$. A másik két ilyen vektor második koordinátái 0-tól is és egymástól is különböznek, ezért egyikük második koordinátája 1. Legyen ez a vektor \mathbf{a} . Ugyanígy kapjuk, hogy van a halmazban egy olyan \mathbf{b} vektor, melyre $b_1 = 1$ és $b_2 = 0$. Tehát

$$\mathbf{a} = (0, 1, a_3, a_4) \quad \text{és} \quad \mathbf{b} = (1, 0, b_3, b_4),$$

ahol $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 3$ és $a_1 \neq b_1$ valamint $a_2 \neq b_2$ miatt az (a_3, b_3) és (a_4, b_4) párok közül az egyik két egyező, a másik pedig két különböző, nemnulla koordinátából áll. Ezért az (a_3, a_4) párt $2 \cdot 2 = 4$ -féleképp választhatjuk. Ezután b_3 -at 2-féleképp választhatjuk, s ez már b_4 -et is meghatározza. \square

Feladatok. Mutassuk meg, hogy a $\mathbf{0}$ vektort tartalmazó 8 jó halmaz közül bármelyiket is választjuk ki, a maradék 7 halmaz közt pontosan 4 olyan van, amelyek az elsőnek választott halmazunkat egyenesben metszi.

Mutassuk meg, hogy a $\mathbf{0}$ vektort tartalmazó 8 jó halmaz közül nem lehet kiválasztani 3 halmazt úgy, hogy közülük bármelyik 2 metszete egyenes legyen.

Bármely szép sudoku megoldás esetén az azonos számjegyet tartalmazó mezőknek megfelelő vektorok egy-egy jó halmazt alkotnak. Tehát a szép megoldás nem más, mint az \mathcal{N} négydimenziós tér 81 vektorának beosztása 9 darab páronként diszjunkt jó halmazba. Jelölje $i = 1, 2, \dots, 9$ esetén \mathcal{S}_i azt a jó halmazt, amelyet az i számjegyet tartalmazó mezőknek megfelelő vektorok alkotnak. Láttuk, hogy \mathcal{S}_i minden i -re egy-egy sík. Jelölje \mathcal{S}'_i az \mathcal{S}_i -nek azt az eltoltját, amely tartalmazza a $\mathbf{0}$ vektort.

A legegyszerűbben úgy kapunk szép megoldást, ha mindegyik \mathcal{S}_i halmaz ugyanannak a jó halmaznak az eltoltja, azaz az \mathcal{S}'_i halmazok megegyeznek. Először vizsgáljuk meg, hogy két eltolt mikor metszi egymást.

Tétel. Legyen \mathcal{C} a $\mathbf{0}$ vektort tartalmazó jó halmaz. Ekkor a $\mathcal{C} + \mathbf{x}$ és $\mathcal{C} + \mathbf{y}$ jó halmazok $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathcal{C}$ esetén egybeesnek, $\mathbf{x} - \mathbf{y} \notin \mathcal{C}$ esetén pedig nincs közös elemük.

Bizonyítás. Azt kell megmutatnunk, hogy ha a két halmaznak van közös eleme, akkor $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathcal{C}$ és a két halmaz megegyezik. Tegyük fel, hogy

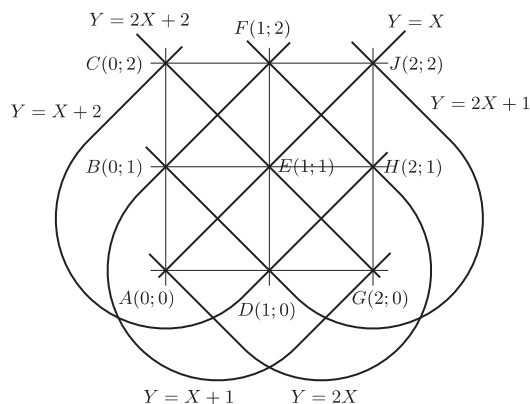
$$\mathbf{z} \in (\mathcal{C} + \mathbf{x}) \cap (\mathcal{C} + \mathbf{y}).$$

Ekkor vannak olyan \mathcal{C} -beli $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ vektorok, melyekre $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{c}_1 = \mathbf{y} + \mathbf{c}_2$, azaz $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2 + 2\mathbf{c}_1$. Vagyis $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ \mathcal{C} -beli vektor. Mivel \mathcal{C} sík, azért ebből következik, hogy $\mathcal{C} + (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathcal{C}$, tehát

$$\mathcal{C} + \mathbf{y} = (\mathcal{C} + (\mathbf{x} - \mathbf{y})) + \mathbf{y} = \mathcal{C} + (\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y}) = \mathcal{C} + \mathbf{x},$$

ami épp a bizonyítandó állítás. \square

Adott \mathcal{C} , a $\mathbf{0}$ -t tartalmazó jó halmaz esetén az a 9 vektor melyekkel eltoljuk, lehet pl. $(\alpha, \beta, 0, 0)$, ahol $\alpha, \beta = 0, 1, 2$. (Ezek éppen az 5. ábrán látható sík pontjai.) Ezek közül bármelyik két különböző vektor különbségének legfeljebb 2 darab nemnulla koordinátája van, ezért a különbségvektor nem lehet benne semelyik, a $\mathbf{0}$ vektort tartalmazó jó halmazban sem. Mivel összesen 8-féleképp választhatjuk \mathcal{C} -t, azért ilyen módon 8 szép megoldást kapunk.



5. ábra

Nézzük most azokat a szép megoldásokat, melyekben a különböző számokhoz tartozó jó halmazok nem ugyanannak a síknak az eltoltjai, azaz az \mathcal{S}'_i halmazok közt van legalább két különböző. Ha $\mathcal{S}'_j \neq \mathcal{S}'_k$, akkor metszetük vagy egy pont (ami épp a $\mathbf{0}$), vagy egy egyenes. Az első esetben az affin tér tulajdonságai miatt azonban $\mathcal{S}_j \cap \mathcal{S}_k$ is egy pont lenne, vagyis a két sík nem lenne diszjunkt. Tehát $\mathcal{S}'_j \cap \mathcal{S}'_k$ egy egyenes. Viszont a $\mathbf{0}$ vektort tartalmazó jó halmazokat leíró tétel utáni feladat szerint ezek közül a halmazok közül nem választható ki 3 úgy, hogy bármelyik kettő metszete egyenes legyen. Vagyis ebben az esetben az $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_9$ síkok két különböző jó halmaz, \mathcal{S}'_j és \mathcal{S}'_k eltoltjai. Az \mathcal{S}'_j és \mathcal{S}'_k síkok meghatároznak egy öket tartalmazó \mathcal{H}_0 hipersíkot. Ez a hipersík és két eltoltja, \mathcal{H}_1 és \mathcal{H}_2 lefedi \mathcal{N} -et. Továbbá \mathcal{S}'_j és \mathcal{S}'_k minden eltoltja teljes egészében benne van valamelyik \mathcal{H}_i -ben, mert tetszőleges \mathcal{D}, \mathcal{E} halmazokra és \mathbf{x} vektorra nyilván igaz, hogy ha $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$, akkor $(\mathcal{D} + \mathbf{x}) \subset (\mathcal{E} + \mathbf{x})$. Ezért a \mathcal{H}_i halmazok bármelyike csak ugyanannak a jó halmaznak az eltoltjait tartalmazhatja.

A számolási feladatainkból következik, hogy a $\mathbf{0}$ -t tartalmazó 8 jó halmaz bármelyikéhez 4 másikat tudunk választani úgy, hogy metszetük egy egyenes legyen. Így tehát összesen $8 \cdot 4 = 32$ rendezett $(\mathcal{S}'_j, \mathcal{S}'_k)$ párt választhatunk ki. Minden pár esetén feltehetjük, hogy az első tag eltoltjai egy, a másodiké pedig két \mathcal{H}_i típusú hipersíkot fednek le. Ezért minden

párhoz 3-3 megoldás tartozik, mert a \mathcal{H}_i hipersíkok közül ki kell választanunk azt az egyet, melyet a pár első tagjának eltöltésével fedünk le. Tehát ezekből a szép megoldásokból $32 \cdot 3 = 96$ különböző van.

Vagyis a szép sudoku megoldások száma $8 + 96 = 104$. Ez nagyságrendekkel kevesebb, mint az összes megoldás száma, ami 5 472 730 538. S ez a szám is nagyságrendekkel kisebb, mint a 9×9 -es latin négyzeteknek a cikk elején említett száma.

Végül még két feladatot adunk.

Feladat. Töltsük ki a 6. ábrán látható sudoku táblát úgy, hogy szép megoldást kapjunk.

				1	2			
				2				
1								
		2		3				
			1	4				5
					6		7	
								7
				7				
		8						

6. ábra

Feladat. Mutassuk meg, hogy a páronként ortogonális sudoku megoldások száma legfeljebb 6.

Hat darab páronként ortogonális sudoku megoldás létezik is, pl. a 7. ábrán láthatók (a kis téglalapok azonos pozícióiban lévő számok alkotnak egy-egy megoldást).

1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9
1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9
7	4	9	8	5	7	9	6	8	1	7	3	2	8	1	3	9	2	4	1	6	5	2	4	6	3	5
5	6	8	6	4	9	4	5	7	8	9	2	9	7	3	7	8	1	2	3	5	3	1	6	1	2	4
4	7	5	5	8	6	6	9	4	7	1	8	8	2	9	9	3	7	1	4	2	2	5	3	3	6	1
9	8	6	7	9	4	8	7	5	3	2	9	1	3	7	2	1	8	6	5	3	4	6	1	5	4	2
3	2	8	1	3	9	2	1	7	6	5	2	4	6	3	5	4	1	9	8	5	7	9	6	8	7	4
6	9	5	4	7	6	5	8	4	9	3	8	7	1	9	8	2	7	3	6	2	1	4	3	2	5	1
9	5	4	7	6	5	8	4	6	3	8	7	1	9	8	2	7	9	6	2	1	4	3	2	5	1	3
7	2	3	8	3	1	9	1	2	1	5	6	2	6	4	3	4	5	4	8	9	5	9	7	6	7	8
6	8	3	4	9	1	5	7	2	9	2	6	7	3	4	8	1	5	3	5	9	1	6	7	2	4	8
2	4	7	3	5	8	1	6	9	5	7	1	6	8	2	4	9	3	8	1	4	9	2	5	7	3	6
2	3	6	3	1	4	1	2	5	5	6	9	6	4	7	4	5	8	8	9	3	9	7	1	7	8	2
8	5	9	9	6	7	7	4	8	2	8	3	3	9	1	1	7	2	5	2	6	6	3	4	4	1	5
8	6	2	9	4	3	7	5	1	2	9	5	3	7	6	1	8	4	5	3	8	6	1	9	4	2	7
3	7	4	1	8	5	2	9	6	6	1	7	4	2	8	5	3	9	9	4	1	7	5	2	8	6	3
5	9	7	6	7	8	4	8	9	8	3	1	9	1	2	7	2	3	2	6	4	3	4	5	1	5	6
4	3	2	5	1	3	6	2	1	7	6	5	8	4	6	9	5	4	1	9	8	2	7	9	3	8	7

7. ábra

Irodalomjegyzék

- [1] Bailey, R., Cameron, P. J. és Connelly, R.: Sudoku, gerechte designs, resolutions, affine space, reguli and Hamming codes, *Amer. Math. Monthly* (2008), 383–404.
- [2] Kiss Gy.: Hogyan nyerjünk a TOTÓ-n? *KöMaL*, **57** (2007), 267–273.
- [3] Kiss Gy. és Szőnyi T.: *Véges geometriák*, Polygon Kiadó (Szeged, 2001).