A 2009-es Eötvös-verseny 2. feladata a következő volt:

Kör alakú asztal közepén áll egy nagyon vékony falú, hengeres üvegváza, amelyben egy gyertya ég. A henger átmérője 12 cm, *tengelye függőleges, a láng közepe* 2 cm*-re van a váza tengelyétől. Laci oldalról, a lánggal azonos magasságból nézi a vázát, és felfigyel arra, hogy a láng mellett a lángnak egy éles, határozott tükörképe is látszik a váza belsejében. Az asztalt körbejárva megállapítja, hogy a láng képének a szélessége és a vázához viszonyított helye folyamatosan változik.*

a) Milyen irányból nézve látszik a láng képe ugyanolyan szélesnek, mint maga a láng?

b) Milyen pályán mozog a láng képének a közepe, miközben Laci körbejárja az asztalt?

A hengertükör leképezésére alkalmazhatjuk a gömbtükörre érvényes leképezési törvényt.

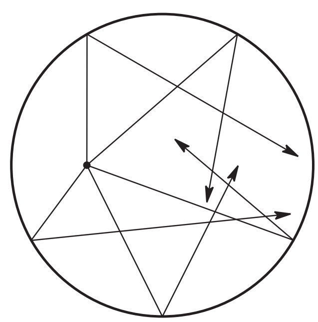
Mint a feladat szövege is utal rá, a Versenybizottság erősen leegyszerűsített megoldást várt a versenyzőktől[1]. A valóságban ugyanis hengertükör sohasem ad egyszerre vízszintes és függőleges irányban is éles képet, és a gömbtükrökre vonatkozó leképezési törvény $\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{1}{f}\right)$ is csak abban az esetben érvényes, ha a tárgyról kiinduló fény a tükörről közelítőleg merőlegesen visszaverődve jut a szemünkbe.

Ebben a cikkben megvizsgáljuk, hogyan lehetett volna a feladatot pontosabban, kevesebb közelítéssel megoldani.

A kép helye attól is függ, milyen irányból nézzük

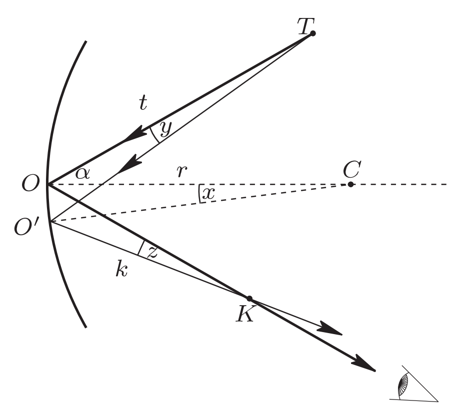
A versenyfeladat szövege a kép szélességére és a kép közepének – vízszintes síkbeli – pályájára vonatkozott, ezért is helyettesítette a hengertükröt gömbtükörrel. A feladatot tehát egy vízszintes síkmetszetben oldjuk meg.

Ha megrajzoljuk a tükör egy belső pontjából kiinduló, majd visszaverődő fénysugarakat, láthatjuk, hogy azok nem egyesülnek egy képpontban (*1. ábra*). Jól ismert tény, hogy a tükörről visszaverődő sugarak vagy azok meghosszabbításai csak nagyon speciális esetekben mennek át egy ponton: akkor, ha a tükör vagy sík, vagy pedig egy kúpszelet, a két pont pedig a kúpszelet két fókusza. A gömb esetén a két fókusz egybeesik a geometriai középpontban.



1. ábra

Ennek ellenére mégis láthatunk többé-kevésbé éles képet akkor is, ha nem merőleges irányból nézünk a tükörbe, ugyanis a visszavert fénysugaraknak csak egy nagyon vékony nyalábja jut a szemünkbe. Hamarosan látni fogjuk, hogy ezek viszont „majdnem” egy ponton mennek át (*2. ábra*). A képpont helye azonban függ attól, hogy milyen irányból nézünk.



2. ábra

Egy szemmel nézve nem mindig érzékeljük pontosan a képpontnak a távolságát. Ha viszont két szemmel, viszonylag nagy távolságból nézünk, akkor két különálló, de még mindig viszonylag kis szögben érkező nyaláb metszéspontjában látjuk a képet, a kép helye közelítőleg ugyanott lesz, és a távolságot is jobban érzékeljük.

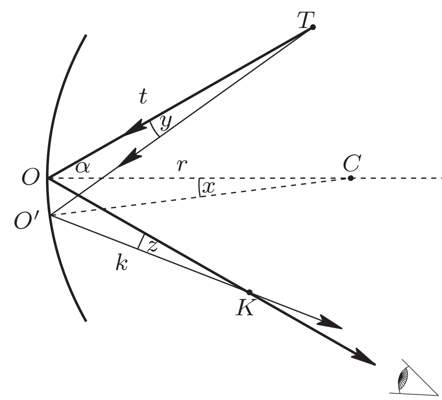
[1] A versenyről a beszámoló lapunk 165. oldalán olvasható.

Leképezési törvény, ha nem szemből nézünk a tükörbe

A tankönyvi számításokban általában csak azt az esetet szoktuk vizsgálni, amikor a tükör egy lapos, kis középponti szögű gömbsüveg, a tárgy (és a kép) pedig közel van a tükör forgástengelyéhez. Ezt a forgástengelyt szoktuk a tükör optikai tengelyének nevezni. A számításokban kizárólag nagyon kicsi szögek fordulnak elő; a szögek koszinuszát gyakran 1-gyel becsüljük, a szögek szinuszát és tangensét pedig magukkal a szögekkel.

Minél nagyobbak a szögek, az alkalmazott közelítések annál nagyobb leképezési hibákhoz vezetnek. *Szférikus aberrációnak* nevezik azt a jelenséget, hogy a tükör tengelyével párhuzamosan érkező, majd a tükörről visszaverődő sugarak nem pontosan a fókuszponton mennek át. Az egy pontból vagy egymással párhuzamosan érkező, de a tengellyel nagy szöget bezáró fénysugarak sem egy ponton keresztül verődnek vissza; ezt nevezik *kómának.*

Most kiszámoljuk a kép helyét abban az esetben, amikor a fény nem merőlegesen érkezik a tükörre. Láttuk, hogy a kép helye attól is függ, hogy a tükör melyik pontjának közelében visszaverődő fény jut a szemünkbe. Jelöljük ez a pontot O-val, és legyen α az O pontbeli beesési szög. Jelöljük a tükör görbületi sugarát r-rel, a gömb középpontját C-vel, a megfigyelt tárgypontot pedig T-vel (*3. ábra*).



3. ábra

Kövessünk nyomon egy második fénysugarat is, ami az O' pontban verődik vissza. Legyen a két visszavert fénysugár metszéspontja K. Legyen $t = OT$ és $k = OK$ – ezeket nevezhetjük tárgy-, illetve képtávolságnak is. Végül legyen

$$OCO'\sphericalangle = x, \quad OTO'\sphericalangle = y \quad \text{és} \quad OKO'\sphericalangle = z.$$

Mivel csak egy vékony fénynyalábot vizsgálunk, az x, y és z szögek kicsik, és az OO' szakaszt helyettesíthetjük egy függőleges szakasszal. A COO', TOO', KOO' háromszögekben

$$OO' \approx rx, \quad OO' \approx \frac{TO\sin y}{\cos\alpha} \approx \frac{ty}{\cos\alpha}, \quad \text{illetve} \quad OO' \approx \frac{KO\sin z}{\cos\alpha} \approx \frac{kz}{\cos\alpha}.$$

A $TOCO'$ és $COKO'$ hurkolt négyszögekből

$$TO'C\sphericalangle = TOC\sphericalangle + OTO'\sphericalangle - OCO'\sphericalangle = \alpha + y - x,$$

$$KO'C\sphericalangle = KOC\sphericalangle + OCO'\sphericalangle - OKO'\sphericalangle = \alpha + x - z.$$

Mivel az O' pontban beeső és visszaverődő fénysugarak ugyanakkora szöget zárnak be az CO' iránnyal,

$$\alpha + y - x = TO'C\sphericalangle = KO'C\sphericalangle = \alpha + x - z,$$

$$y + z = 2x,$$

$$\frac{OO'\cos\alpha}{t} + \frac{OO'\cos\alpha}{k} \approx 2\frac{OO'}{r},$$

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} \approx \frac{2}{r\cos\alpha}.$$

Az eredmény nem függ az O' pont megválasztásától. Az O pont közelében visszaverődő fénysugarak tehát (közelítőleg) ugyanazon a K ponton mennek át. Az $f = r/2$ fókusztávolságot is behelyettesítve, a nagy α értékek esetén is érvényes leképezési törvény:

(1) $$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f\cos\alpha}.$$

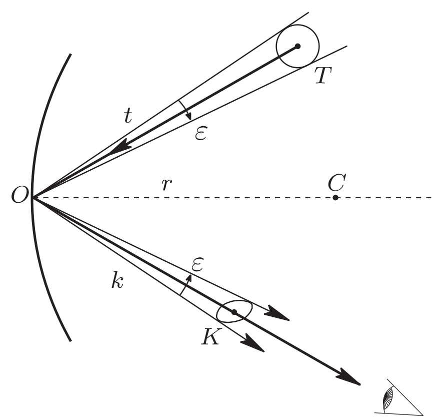
Az érdeklődő Olvasóra bízzuk annak végiggondolását, hogy a levezetés domború tükör ($r < 0$) és látszólagos kép ($k < 0$) esetén is elvégezhető, és ugyanerre az eredményre vezet.

Mekkora a nagyítás?

A legtöbb optikai rendszerben a képet valamilyen, a tengelyre merőleges felületre (filmre, vetítővászonra, félvezetőre vagy éppen látóidegre) vetítjük. Ennek megfelelően a tankönyvek a nagyítás mértékét csak az optikai tengelyre merőleges irányokban szokták meghatározni.

Megjegyezzük, hogy a tengellyel párhuzamos és a tengelyre merőleges irányokban a nagyítás különböző. A leképezési törvény differenciálásával láthatjuk, hogy a nagyítás a tengely irányában $(k/t)^2$, szemben a tengelyre merőleges irányokban érvényes k/t értékkel. A kép és a tárgy tehát általában geometriailag nem is hasonló, de a torzulás csak a megfigyelési irányban jelentkezik. Abban az esetben, amikor $k \approx t$, például ha egy homorú gömbtükör görbületi középpontjának közelében van a tükörhöz képest nagyon kisméretű tárgy, akkor a kép alakja nem is nyúlik meg vagy lapul össze. Valamekkora torzulás ilyenkor is fellép, de ennek mértéke a tárgy és a kép méretével együtt csökken.

Most megvizsgáljuk, hogy a 3. ábrán látott elrendezésben mekkora a nagyítás a fénysugár irányára merőlegesen. Helyezzünk el egy kis méretű tárgyat a T pontban, és vizsgáljuk ennek képét, ami a K pont körül helyezkedik el (*4. ábra*). A tárgy méretén az OT egyenesre merőleges kiterjedését értjük (amekkorának az TO félegyenes irányából látnánk), a kép méretén pedig az OK egyenesre merőleges kiterjedését fogjuk érteni.



4. ábra

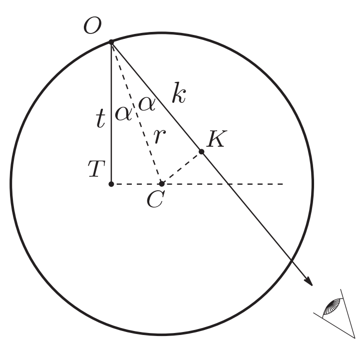
Az O pontban visszaverődő sugarakat nyomon követve láthatjuk, hogy az O pontból a tárgy és a kép ugyanakkora ε szögben látszik, függetlenül attól, hogy a kép alakja miként torzul el. Mivel a tárgy és a kép is kis méretű, az O-tól mért távolságokat a tárgy esetében t-vel, a kép esetében k-val becsülhetjük. A tárgy OT-re merőleges kiterjedése tehát közelítőleg $t\varepsilon$, a kép OK-ra merőleges kiterjedése pedig $k\varepsilon$. A fénysugár útjára merőleges nagyítás tehát az általános esetben is

$$N = \frac{k}{t}.$$

Az Eötvös-feladat pontosabb megoldása

Most már minden eszköz rendelkezésünkre áll a feladat megoldásához.

Az a) részben azokat az eseteket keressük, amikor a nagyítás 1, azaz $k = t$. Legyen ismét C a kör középpontja, O az a pont, amelynek közelében visszaverődő fény a szemünkbe jut, α pedig a beesési szög az O pontban. A $k = t$ feltétel akkor teljesül, ha az OCT és OCK háromszögek egybevágóak (*5. ábra*).



5. ábra

Az (1) módosított leképezési törvényből

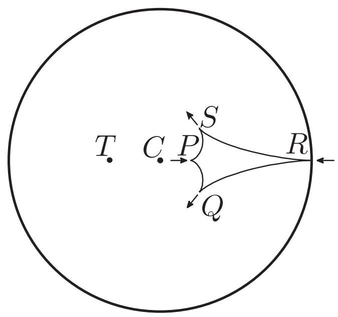
$$\frac{2}{r\cos\alpha}=\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{2}{t}=\frac{2}{k},\qquad \text{azaz}\qquad t=k=r\cos\alpha.$$

Ez pontosan akkor teljesül, ha $OTC\sphericalangle=OKC\sphericalangle=90^\circ$. Az α szöget az OCT és OCK háromszögekből könnyen kiszámíthatjuk:

$$\alpha=\arcsin\frac{CT}{OC}=\arcsin\frac{1}{3}\approx 19{,}47^\circ.$$

A gyertyaláng képét tehát akkor látjuk a valódi lánggal azonos szélességűnek, amikor a KO megfigyelési irány $90^\circ+2\alpha\approx 128{,}94^\circ$ szöget zár be a TC iránnyal.

A feladat b) részében a kép pályáját nem lenne nehéz paraméteres görbeként felírni. Ha a 6 egység sugarú henger közepét választjuk origónak, és a gyertya a $(-2,0)$ pontban van, a $\overrightarrow{CO}$ vektor iránya φ, akkor az O pontot, a $\cos\alpha$, k, t mennyiségeket, végül a K pontot is kifejezhetjük φ-vel. Magát a görbét a *6. ábrán* láthatjuk.



6. ábra

A láng pályája nem sima, négy pontban is megtörik. A négy „csúcs" mellett nyilakkal jelöltük a megfelelő megfigyelési irányokat. Mind a négy csúcs különleges: amikor „vízszintesen", a TC egyenes irányából nézzük a lángot, a kép a P, illetve R pontban van, Q és S pedig éppen azok a pontok, ahol a lánggal azonos szélességű képet láthatunk.

A megoldás végén érdemes összefoglalni, hogy milyen közelítéseket alkalmaztunk.

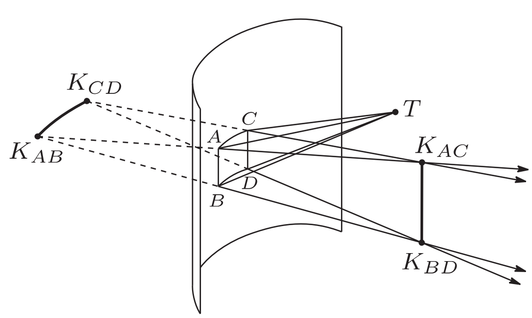
– A módosított leképezési törvény levezetésében elhanyagoltuk a szemünkbe érkező fénysugár átmérőjét, két szemmel történő megfigyelés esetén pedig a két megfigyelési irány által bezárt szöget.

– A nagyítás levezetésében elhanyagoltuk a láng átmérőjét, és vele az α szög fellépő értékei közötti különbségeket.

– Szintén a nagyítás kiszámításakor a kép méretének az OK-ra merőleges kiterjedését tekintettük, és nem azt vizsgáltuk, hogy szemünkkel mekkora szögben látjuk a képet.

Mi a helyzet a térben?

Eddig mindent vízszintes síkban vizsgáltunk. A térben egy dimenzióval több áll rendelkezésre – azért, hogy a dolgok elromolhassanak. Vizsgáljuk meg, mi történik, ha egy hengertükörbe nézünk, mint például az Eötvös-feladatban. A *7. ábra* szemlélteti, hogy viselkednek a T pontból induló, és a hengerről visszaverődő fénysugarak. A vizsgált fénynyaláb az $ABDC$ négyszögön verődik vissza.



7. ábra

A függőleges síkokban érkező fénysugarak hasonlóan viselkednek, mint síktükör esetében. A visszavert fénysugarak meghosszabbításai egy ponton mennek át a tükör mögött. Mindegyik függőleges síkon belül keletkezik egy-egy látszólagos kép, de a képpontok helye minden síkban más és más. A képpontok egy körívet ($K_{AB}K_{CD}$) alkotnak.

A tükör vízszintes szeletein visszaverődő fénysugarak hasonlóan viselkednek, mint a vízszintes síkban. Ha a megfigyelési irányt rögzítjük, akkor minden szelethez keletkezik egy (valódi vagy látszólagos) képpont, ezek viszont egy függőleges szakaszon ($K_{AC}K_{BD}$) helyezkednek el.

Ezt a jelenséget, amely gömbtükrök és lencsék alkalmazásánál is előfordul, *asztigmatizmus*nak nevezik. Gömbtükör esetén például kizárólag a gömb középpontjának irányában kapunk éles képet; minél távolabbi irányba nézünk, annál elmosódottabb lesz a kép (lásd első borító).

Mivel szemünkkel csak egy nagyon keskeny fénynyalábot látunk, a kép elmosódottsága nem mindig feltűnő. A jelenség látványosabb fényképek készítésekor, mert a kameránk blendéjének átmérője nagyobb, mint az emberi pupilla. A nagy látószögű objektívekhez különleges lencséket használnak az asztigmatizmus kiküszöbölésére.

Végül gondoljunk bele, mi történik, ha két szemmel nézünk a hengertükörbe. A feladatbeli gyertyalángról mindkét szemünkkel enyhén elmosódott képet látunk. Ha fejünket függőlegesen tartjuk, a két szemünk egy magasságban van. Ha például a *7. ábrán* az A és C pontok közelében visszavert fénysugarak jutnak szemünkbe, egy valódi képet láthatunk a K_{AC} pontban. Ha viszont fejünket $90°$-kal oldalra döntjük, elérhetjük, hogy az A és B pontokban visszavert fény jusson a szemünkbe, így a (látszólagos) kép a K_{AB} pont lesz.

Rossz hír, hogy a többi esetben, ha fejünket csak kicsit döntjük oldalra, a kétféle visszaverődő sugárnyaláb nem fogja metszeni egymást; amit látunk, az nem csak elmosódott, de még szellemképes is lesz. (A szellemképeken kancsalítással segíthetünk; Süsü, a sárkány előnyben.) A kép helye és minősége nem csak attól függ, hogy honnan nézzük, hanem még attól is, hogy milyen irányban tartjuk a fejünket.