I. rész

1. *Határozzuk meg a következő kifejezések pontos értékét számológép nélkül:*

$$a)\quad \sqrt{100^{\lg\left(1-\sin\frac{19\pi}{6}\right)}} \qquad\qquad b)\quad \cos^2 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 15^\circ$$

$$c)\quad \log_\pi \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \operatorname{tg}\left(-\frac{11\pi}{4}\right) + 2^{\log_4 9}.$$

(*11 pont*)

Megoldás. *a*)

$$\sin\frac{19\pi}{6} = \sin\left(\frac{7\pi}{6} + 2\pi\right) = \sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2},$$

így a kitevő $\lg\frac{3}{2}$. Vagyis:

$$\sqrt{100^{\lg\frac{3}{2}}} = 10^{\lg\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}.$$

b) Felhasználjuk a következőket: $\operatorname{tg} 15^\circ = \dfrac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}$, $2\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ = \sin 30^\circ$. Ekkor az átalakítások:

$$\cos^2 15^\circ \cdot \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \cos 15^\circ \cdot \sin 15^\circ = \frac{2\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ}{2} = \frac{\sin 30^\circ}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}.$$

c) Kiszámoljuk a három tag értékét külön-külön:

$$\log_\pi \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \log_\pi \pi^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{11\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 3\pi\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1,$$

$$2^{\log_4 9} = 4^{\log_4 9^{\frac{1}{2}}} = 9^{\frac{1}{2}} = 3.$$

Összevonás után kapjuk: $-\dfrac{1}{2} + 1 + 3 = \dfrac{7}{2}$.

2. *Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számpárok halmazán:*

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 3xy + 4} + x(x - 3y) &= 2,\\ 2x - y &= 3. \end{aligned}$$

(*12 pont*)

Megoldás. Az első egyenlet $\sqrt{x^2 - 3xy + 4} + (x^2 - 3xy + 4) - 6 = 0$ alakban is írható. Ha bevezetjük a $\sqrt{x^2 - 3xy + 4} = a \geq 0$ új ismeretlent, akkor a következő egyenletet kapjuk: $a^2 + a - 6 = 0$. Ennek megoldásai: $a_1 = -3$, $a_2 = 2$, de tudjuk, hogy az a negatív nem lehet. Vagyis: $\sqrt{x^2 - 3xy + 4} = 2$, amiből $x^2 - 3xy + 4 = 4$, azaz $x^2 - 3xy = 0$.

A második egyenletből $y = 2x - 3$. Ezt behelyettesítve az előbb kapott egyenletbe: $x^2 - 3x(2x - 3) = 0$. Ennek megoldásai: $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{9}{5}$.

Visszahelyettesítéssel kapjuk az egyenletrendszer megoldásait: $x_1 = 0$, $y_1 = -3$ vagy $x_2 = \dfrac{9}{5}$, $y_2 = \dfrac{3}{5}$.

3. *Adott az*

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + a = 0$$

egyenletű kör. Az abszcissza tengelyen pontosan egy olyan pont van, melyből a körhöz húzott érintők 60°*-os szöget zárnak be egymással.*

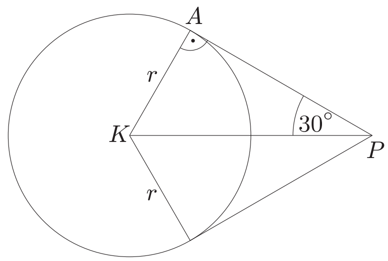
a) *Határozzuk meg az a paraméter értékét.*

b) *Mekkora szöget zárnak be egymással a kör origóból húzott érintői az* $a = 12$ *paraméter esetén?* (*14 pont*)

Megoldás. *a*) A megadott kör egyenlete átírható $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 13 - a$ alakba. Használjuk a mellékelt *vázlatrajz* jelöléseit.

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{r}{KP},$$

tehát $KP = 2r$. A lehetséges P pontok egy K középpontú $2r$ sugarú körön helyezkednek el. Ennek egyenlete: $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4(13-a)$.



Ha az x tengelynek egy közös pontja van ezzel a körrel, akkor e kör középpontjának második koordinátája egyenlő a kör sugarával: $2 = 2\sqrt{13-a}$. Ebből kapjuk, hogy $a = 12$.

b) Az $a = 12$ paraméter esetén a kör egyenlete: $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$.

Legyen a keresett szög 2α. Ekkor

$$\sin\alpha = \frac{1}{OK} = \frac{1}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}}, \quad \text{ebből} \quad \alpha \approx 16{,}1°.$$

Vagyis az origóból húzott érintők hajlásszöge kb. 32,2°.

4. *Három pozitív szám egy mértani sorozat három szomszédos eleme. Ha a másodikhoz hozzáadunk kettőt, egy számtani sorozat három egymás utáni elemét kapjuk. Ha az így kapott sorozat első elemét 16-tal növeljük, ismét egy újabb, mértani sorozat három szomszédos elemét kapjuk. Melyik az eredeti három szám?* (*14 pont*)

Megoldás. Legyenek a számtani sorozat megfelelő elemei: $a-d$, a, $a+d$.

Az első mértani sorozat elemei: $a-d$, $a-2$, $a+d$. Vagyis: $(a-2)^2 = (a-d)(a+d)$.

A második mértani sorozat elemei: $a-d+16$, a, $a+d$. Vagyis:

$$a^2 = (a+d)(a-d+16).$$

Az első egyenlet $d^2+4 = 4a$, a második egyenlet pedig $d^2 - 16a - 16d = 0$ alakban írható. Az így kapott két egyenletből d-re a következőt kapjuk: $3d^2 + 16d + 16 = 0$. Ennek megoldásai: $d_1 = -4$, $d_2 = -\dfrac{4}{3}$. A $d = -\dfrac{4}{3}$-dal az eredeti sorozatnak lesz negatív eleme is, így nem felel meg a feladat feltételeinek.

A $d = -4$ esetén $a = 5$.

Vagyis az eredeti mértani sorozat három szomszédos eleme: 9; 3; 1.

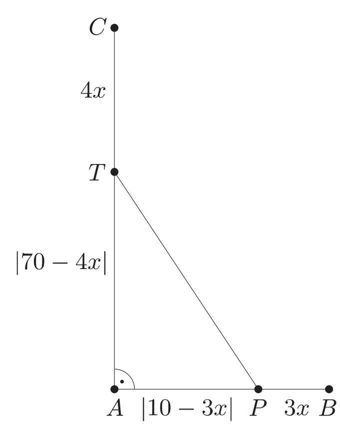
II. rész

5. *Két egyenes út* A *pontban, derékszögben metszi egymást. Az útkereszteződéstől* 70 km *távolságban az egyik úton,* 10 km *távolságban a másik úton étterem van. A két étteremből egyszerre indul el egy-egy társaság* A *felé. A távolabbról jövők óránként* 4 km-*t, a közelebbről jövők óránként* 3 km-*t tesznek meg.*

a) *Hány óra múlva lesznek egymáshoz a legközelebb, és mekkora a köztük lévő legkisebb távolság?*

b) *Indulás után hány órával lesz a köztük lévő távolság* 50 km? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Használjuk az *ábra* jelöléseit. Az egyik étterem a B, a másik a C pontban van. Jelöljük x-szel, hogy az indulás után hány óra múlva lesznek egymáshoz a legközelebb.



Ekkor $TA = |70 - 4x|$, $AP = |10 - 3x|$. Az APT háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt:

$$TP^2 = (70 - 4x)^2 + (10 - 3x)^2.$$

Keressük TP minimumát:

$$\begin{aligned} TP &= \sqrt{(70 - 4x)^2 + (10 - 3x)^2} = \\ &= \sqrt{4900 - 560x + 16x^2 + 100 - 60x + 9x^2} = \\ &= \sqrt{25x^2 - 620x + 5000}\,. \end{aligned}$$

A gyökjel alatti kifejezés minimumának helye megegyezik a feladat megoldásával. Valóban minimuma lesz, hisz a másodfokú tag együtthatója pozitív. Átalakítva:

$$\sqrt{(5x - 62)^2 + 1156}\,.$$

Ennek minimum helye: $x = \dfrac{62}{5}$. Tehát 12,4 óra múlva lesznek a legközelebb.

Ekkor a köztük lévő távolság:

$$TP = \sqrt{(70 - 4x)^2 + (10 - 3x)^2} = 34.$$

Vagyis a keresett távolság: 34 km.

b) A feladat szövege szerint: $(70 - 4x)^2 + (10 - 3x)^2 = 2500$. Az egyenletnek két megoldása van: $x_1 \approx 19{,}7$ (óra), $x_2 \approx 5{,}07$ (óra).

Mindkét érték megfelel a feladat feltételeinek.

6. *Egy dobókockával háromszor dobunk.*

a) *Mekkora annak a valószínűsége, hogy a dobott számok szorzata prímszám?*

b) *Mekkora annak a valószínűsége, hogy a dobott számok szorzata négyzetszám?* (*16 pont*)

Megoldás. Az összes lehetőségek száma: $6^3 = 216$.

a) A három kivett szám szorzata csak úgy lehet prím, hogy ha 2 db 1-est és 1 db prímszámot vettünk ki az urnából: 1, 1, 2, vagy 1, 1, 3, vagy 1, 1, 5. Mindhárom eset háromféleképpen fordul elő, így a kedvező esetek száma 9. A keresett valószínűség: $p = \dfrac{9}{216} \approx 0{,}04167$.

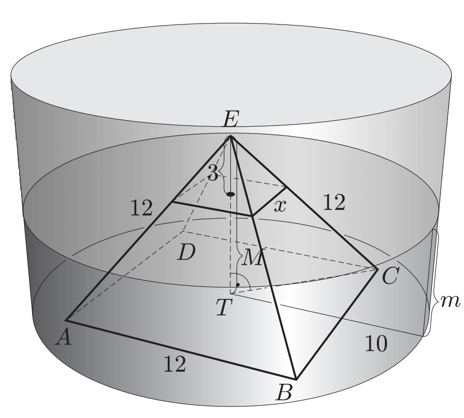
b) A három kivett szám szorzata csak akkor lesz négyzetszám, ha a következő számokat húzzuk ki: 1, 1, 1, vagy 4, 4, 4, vagy 1, 1, 4, vagy 1, 2, 2, vagy 1, 3, 3, vagy 1, 4, 4, vagy 1, 5, 5, vagy 1, 6, 6, vagy 2, 2, 4, vagy 3, 3, 4, vagy 5, 5, 4, vagy 6, 6, 4, illetve 2, 3, 6.

Az első két eset egy-egyféleképpen valósulhat meg, az utolsó eset hatszor adódik, a többi pedig háromféleképpen lehetséges. A kedvező esetek száma: $1 + 1 + 6 + 3 \cdot 10 = 38$, $P = \dfrac{38}{216} \approx 0{,}1759$.

7. *Egy* 10 cm *sugarú egyenes henger alakú edénybe vizet öntünk. Ezután belehelyezünk egy olyan négyzet alapú egyenes gúlát, amelynek minden éle* 12 cm. *A gúla lesüllyed a víz fenekére, alapnégyzete a henger alapkörére illeszkedik, és a gúla csúcsa* 3 cm *magasan kiáll a vízből. Mennyit emelkedik a vízszint?* (*16 pont*)

Megoldás. A vízszint annyival emelkedik, amennyi a vízben levő csonkagúla térfogatával megegyező, 10 cm sugarú henger magassága. Az *ábra* jelöléseit használva: az eredeti gúla M magasságát az ETC derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétel segítségével kapjuk:

$$CT = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}\,.$$



$M^2 = 12^2 - \left(6\sqrt{2}\right)^2 = 72$, így $M = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$. A csonkagúla magassága: $m = 6\sqrt{2} - 3$. A csonkagúla fedő- és alapnégyzetének hasonlósági aránya: $3 : 6\sqrt{2}$, így

$$\frac{3}{6\sqrt{2}} = \frac{x}{12}, \quad \text{ebből} \quad x = 3\sqrt{2}.$$

A csonkagúla térfogata: $V = \left(2\sqrt{2} - 1\right)\left(162 + 36\sqrt{2}\right) \approx 389{,}29$ cm. Egy 10 cm sugarú, h magasságú henger térfogata: $10^2 \cdot \pi \cdot h = 389{,}29$, amiből $h = 1{,}24$ cm.

Vagyis a vízszint kb. 1,24 cm-t emelkedik.

8. *A* $\sin^2 x + \sin x + 2^m - 4 = 0$ *egyenletben határozzuk meg az* m *paraméter értékét úgy, hogy az egyenletnek a* $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ *intervallumban pontosan egy gyöke legyen.* (*16 pont*)

Megoldás. Akkor van valós gyöke az egyenletnek, ha a diszkriminánsa nem negatív, vagyis $17 - 4 \cdot 2^m \geq 0$, $m \leq \log_2 \frac{17}{4} \approx 2{,}04$.

A $\sin x$-re másodfokú egyenlet gyökei:

$$\sin x = \frac{-1 + \sqrt{17 - 4 \cdot 2^m}}{2}, \tag{1}$$

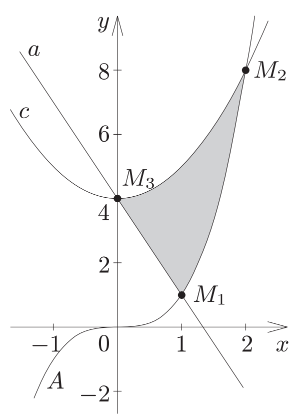
$$\sin x = \frac{-1 - \sqrt{17 - 4 \cdot 2^m}}{2}. \tag{2}$$

A szinuszfüggvény növekvő a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon, és $-1 \leq \sin x \leq 1$, ezért (1)-ből

$$-1 \leq \frac{-1 + \sqrt{17 - 4 \cdot 2^m}}{2} \leq 1, \qquad -1 \leq \sqrt{17 - 4 \cdot 2^m} \leq 3,$$

vagyis a bal oldali egyenlőtlenség minden megengedett $m \leq 2{,}04$-re teljesül, a jobb oldal $1 \leq m$-re igaz. Így az (1) $1 \leq m \leq 2,04$ esetén esik a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumba, a (2) $2 \leq m \leq 2{,}04$ esetén. Pontosan egy gyök $1 \leq m < 2$ esetén esik az adott intervallumba. Pontosan egy gyök van akkor is, ha $m = 2{,}04$.

9. *Határozzuk meg az* $y = x^2 + 4$, $y = -3x + 4$, $y = x^3$ *egyenletű görbék grafikonja által határolt véges terület nagyságát. Ezt a síkidomot forgassuk meg az* x *tengely körül. Mekkora az így kapott forgástest térfogata?* (*16 pont*)



Megoldás. Készítünk *vázlatrajzot.* Az $M_1(1;1)$, $M_2(2;8)$, $M_3(0;4)$ meghatározása után felírható:

$$T = \int_0^2 (x^2+4)\,dx - \int_0^1 (-3x+4)\,dx - \int_1^2 x^3\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}+4x\right]_0^2 - \left[-\frac{3x^2}{2}+4x\right]_0^1 - \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \frac{53}{12}\,.$$

$$V = \pi\left(\int_0^2 (x^2+4)^2\,dx - \int_0^1 (-3x+4)^2\,dx - \int_1^2 x^6\,dx\right) =$$

$$= \pi\left[\int_0^2 (x^4+8x^2+16)\,dx - \int_0^1 (9x^2-24x+16)\,dx - \int_1^2 x^6\,dx\right] =$$

$$= \pi\left[\left[\frac{x^5}{5}+\frac{8x^3}{3}+16x\right]_0^2 - \left[\frac{9x^3}{3}-\frac{24x^2}{2}+16x\right]_0^1 - \left[\frac{x^7}{7}\right]_1^2\right] = \frac{3632}{105}\pi \approx 108{,}67.$$