I. rész

1. Adott az (a_n) számtani sorozat. Igazoljuk, hogy a $b_n = a_{n+1}^2 - a_n^2$ képlettel értelmezett sorozat is számtani sorozat. (*11 pont*)

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{x+1}{x-2}\,.$$

(*12 pont*)

3. Melyek azok a $P(x;y)$ pontok, amelyekre teljesül, hogy $\big||x|-1\big| - |y| \leq 0$? (*14 pont*)

4. Egy urnában 7 piros és 9 kék golyó van. Egymás után kihúzunk ötöt úgy, hogy minden húzás után visszatesszük a húzott golyót. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a kihúzott golyók között több a piros, mint a kék? (*14 pont*)

II. rész

5. Egy távközlési társaság 13 000 előfizetővel rendelkezik 6500 Ft-os havidíj mellett. A piackutatások azt mutatják, hogy ha csökkentenék a havidíjat 100 Ft-tal, akkor 250 új előfizetőhöz jutnának, és ez igaz lenne minden újabb 100 Ft-tal történő csökkentésre. (A havidíj összege ennél a társaságnál mindig 100-zal osztható szám.) Mekkora havi előfizetési díj mellett lenne, a piackutatások szerint, a legnagyobb bevétele a társaságnak? (*16 pont*)

6. Legyen A_1, B_1, C_1 rendre az ABC háromszög BC, CA, AB oldalán egy-egy tetszőleges pont. Legyen $l_a = AA_1$, $l_b = BB_1$, $l_c = CC_1$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{2} < \frac{l_a + l_b + l_c}{a+b+c} < \frac{3}{2}\,.$$

(*16 pont*)

7. Egy egyenes körkúpba írjunk bele egy félgömböt úgy, hogy az a körlapjával illeszkedjék a kúp alapkörének síkjára, gömbfelülete pedig érintse a kúp palástját. A kúp felszíne úgy aránylik a félgömb görbült felületének a felszínéhez, mint 18 : 5. Mekkora a kúp nyílásszöge? (*16 pont*)

8. Bálint és Jonatán a következő játékot játsszák. Dobnak két kockával; ha a dobott számok szorzata vagy összege hárommal osztható, akkor Bálint, egyébként Jonatán nyeri a játékot. Kinek van nagyobb esélye a győzelemre? (*16 pont*)

9. Mely valós p számokra igaz, hogy minden valós x számra teljesül a

$$\frac{2x^2+2x+3}{x^2+x+1} \leq p$$

egyenlőtlenség? (*16 pont*)