[1]

1. Latin négyzetek

n-edrendű *latin négyzetnek* olyan $n \times n$-es táblázatot nevezünk, amelynek mezőit úgy töltjük ki az $1, 2, \ldots, n$ számokkal, hogy minden sorban és minden oszlopban mindegyik szám pontosan egyszer szerepel. A jól kitöltött sudoku tábla tehát egy 9×9-es latin négyzet. Ha semmi egyéb feltételt nem támasztunk, akkor egyszerűen tudunk bármekkora latin négyzetet készíteni: az első sorba beírjuk 1-től n-ig növekvő sorrendben a számokat, majd a következő sorokat úgy készítjük, hogy az előző sort mindig ciklikusan eggyel balra léptetjük. Ilyen 6×6-os latin négyzet látható az *1. ábrán.*

1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	1
3	4	5	6	1	2
4	5	6	1	2	3
5	6	1	2	3	4
6	1	2	3	4	5

1. ábra

Napjainkban elsősorban a statisztikusok használnak latin négyzeteket mintavételekhez. Ha például egy város 4 különböző négyévfolyamos gimnáziumába járó diákjainak tudását szeretnénk 4 tantárgyból felmérni úgy, hogy ne kelljen minden diáknak minden tárgyból megírnia a dolgozatot, de az eredmény reprezentálja az iskolák és az egyes évfolyamokra járó tanulók tudását is, akkor a következőképpen járhatunk el: az iskolákat megszámozzuk 1-től 4-ig és minden iskola minden évfolyamáról kiválasztunk egy-egy tanulót. Készítünk egy 4×4-es latin négyzetet, melynek sorai az évfolyamoknak, oszlopai pedig a négy tantárgynak felelnek meg. Ha az i-edik sor j-edik oszlopában a k számjegy áll, akkor a k-adik iskola i-edik évfolyamos tanulója a j-nek megfelelő tantárgyból ír dolgozatot.

Az első természetesen adódó kérdés a latin négyzetekkel kapcsolatban az, hogy adott n esetén hány különböző latin négyzet létezik. A továbbiakban ha a latin négyzetek számáról beszélünk, akkor mindig feltesszük, hogy az első sorban az $1, 2, \ldots, n$ számok növekvő sorrendben szerepelnek. Ez nem befolyásolja a négyzetek tulajdonságait, hiszen csak a jelölés megválasztását jelenti.

Könnyű belátni, hogy 2×2-es latin négyzetből egy, 3×3-asból pedig kettő van (ez utóbbi abból következik, hogy a második sor első eleme 2 vagy 3 lehet, s ennek a megadása után már egyértelműen meghatározható a többi elem). A két 3×3-as négyzet:

1	2	3
2	3	1
3	1	2

1	2	3
3	1	2
2	3	1

2. ábra

Az n növekedésével nagyon gyorsan nő a latin négyzetek száma.

n	négyzetek száma
4	24
5	1344
6	9408×120
7	$16\,927\,968 \times 6!$
8	$535\,281\,401\,856 \times 7!$
9	$377\,597\,570\,964\,258\,816 \times 8!$

A pontos számot csak $n \leq 15$ esetén ismerjük. Ha $n = 15$, akkor ez nagyságrendileg 10^{86}. M. Hall egy tétele alsó becslést ad, eszerint az $n \times n$-es latin négyzetek száma legalább $2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot (n-1)!$.

A latin négyzetekhez kapcsolódó első, írásban említett feladat 1723-ból származik: helyezzük el a francia kártya 16 különböző figuráját egy 4×4-es táblázatba úgy, hogy minden sorban is és oszlopban is minden szín és minden figura pontosan egyszer forduljon elő. Nem sokkal később, 1779-ben kapta Euler a következő feladatot II. Katalin cárnőtől: a cári seregben 6 különböző tiszti rendfokozat van. Kiválasztunk 6 különböző ezred tisztjei közül 36-ot úgy, hogy az

[1] A cikk elkészítését az NK 67867 és a K 81310 számú OTKA pályázat támogatta.

azonos ezredbeliek közt ne legyenek azonos rangúak. Fel lehet-e sorakoztatni a tiszteket egy 6×6-os alakzatban úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban minden rangból és minden ezredből pontosan egy szerepeljen közülük? Euler sejtette, hogy a feladat nem oldható meg, bizonyítani azonban nem tudta. Ezt csak 1900-ban sikerült G. Tarrynak belátnia.

Ezekben a feladatokban olyan latin négyzeteket kell konstruálnunk, melyeknek még extra tulajdonságai is vannak. Ha L latin négyzet, akkor jelölje $L_{i,j}$ az i-edik sorának j-edik elemét. Két n-edrendű latin négyzet, L^1 és L^2 *ortogonális,* ha az $\left(L^1_{i,j}, L^2_{i,j}\right)$ párok $1 \leq i, j \leq n$ esetén az $1, 2, \ldots, n$ számokból képezhető összes rendezett párt pontosan egyszer állítják elő. Például a *2. ábrán* szereplő harmadrendű latin négyzetek ortogonálisak. Szemléletesen ha a két latin négyzetben szereplő számokat egy négyzetbe írjuk, akkor minden mezőben különböző rendezett párokat kapunk. Az eddigi feladatokat pedig úgy fogalmazhatjuk meg, hogy adjunk meg különböző méretű (4×4-est a kártyáknál, illetve 6×6-ost a tiszteknél) ortogonális latin négyzetpárokat.

Az n-edrendű latin négyzetek egy $\{L^1, L^2, \ldots, L^k\}$ halmaza ortogonális rendszert alkot, ha közülük bármely kettő ortogonális. Ismert, hogy ha $n > 2$ és $n \neq 6$, akkor van n-edrendű ortogonális latin négyzetpár. (Ennek bizonyítása megtalálható a [2] könyv 12. fejezetében.) Az ortogonális rendszer mérete viszont nem lehet túl nagy.

Tétel. *Az n-edrendű latin négyzetek bármely ortogonális rendszere legfeljebb $n-1$ elemű.*

Bizonyítás. Legyen $\{L^1, L^2, \ldots, L^k\}$ ortogonális rendszer. Feltehető, hogy minden négyzet első sorában növekvő sorrendben szerepelnek az $1, 2, \ldots, n$ számok. Nézzük a négyzetek második sorának első elemét. Ez egyik négyzetben sem lehet 1, és bármelyik kettőben egymástól különböző kell, hogy legyen. Ha ugyanis $i \neq j$ esetén $L^i_{2,1} = L^j_{2,1} = m$ teljesülne, akkor $L^i_{1,m} = L^j_{1,m} = m$ miatt L^i és L^j nem lenne ortogonális, mert az azonos számokat tartalmazó párok az első sorban szerepelnek. Vagyis ebbe a mezőbe legfeljebb $n-1$ különböző számot írhatunk. □

Ha létezik $n-1$ elemű ilyen halmaz úgy, hogy bármely kettő ortogonális, akkor a *latin négyzetek teljes ortogonális rendszeréről* beszélünk. Ha n prímszám, akkor egyszerűen készíthetünk teljes ortogonális rendszert.

Legyen $m = 1, 2, \ldots, n-1$ esetén $a^m_{i,j}$ az $m(i-1)+(j-1)$ szám n-nel való maradékos osztásánál kapott maradék (azaz $m(i-1)+(j-1)$ értéke modulo n) és legyen $L^m_{i,j} = a^m_{i,j} + 1$. (Ha $n = 3$, akkor a *2. ábra* bal oldali latin négyzete L^1, a jobb oldali pedig L^2.) Könnyű belátni, hogy L^m minden m-re latin négyzet és az így készített $n-1$ latin négyzet közül bármely kettő ortogonális.

Hasonló módon készíthető teljes ortogonális rendszer minden prímhatvány esetén. Ezek a konstrukciók a véges síkok létezésén alapulnak, leírásuk megtalálható pl. a [4] könyv 1. fejezetében. Ha tehát n prímhatvány, akkor létezik latin négyzetek teljes ortogonális rendszere. Más esetekben a probléma nyitott, kivéve az $n = 6$ és $n = 10$ esetét. Ha $n = 6$, akkor Tarry említett eredménye szerint már két ortogonális latin négyzet sem létezik. Ha $n = 10$, akkor létezik ortogonális latin négyzetpár, de teljes ortogonális rendszer nem. Ez szintén véges síkokra vonatkozó eredményekből következik [4].

2. A sudoku tábla és a négydimenziós véges affin tér

A kitöltött sudoku tábla egy olyan 9×9-es latin négyzet, melynek még az a tulajdonsága is megvan, hogy ha 3×3-as kis négyzetekre osztjuk, akkor minden kis négyzetben is pontosan egyszer fordul elő 1-től 9-ig minden szám. A *3. ábrán* látható sudoku táblának további érdekes tulajdonságai is vannak.

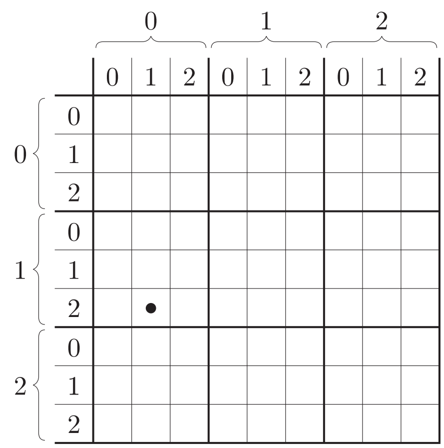
1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	7	8	3	1	2	6	4	5
5	6	4	8	9	7	2	3	1
8	9	7	2	3	1	5	6	4
4	5	6	7	8	9	1	2	3
3	1	2	6	4	5	9	7	8
6	4	5	9	7	8	3	1	2
2	3	1	5	6	4	8	9	7
7	8	9	1	2	3	4	5	6

3. ábra

Nevezzük *nagy sornak,* illetve *nagy oszlopnak* az *ábrán* vastag vonallal határolt 3-3 sort, illetve oszlopot tartalmazó részeket. Így 3-3 nagy sor és nagy oszlop van, bármely nagy sor és nagy oszlop metszete egy *kis négyzet.* Minden kis négyzet 3-3 *kis sort,* illetve *kis oszlopot* tartalmaz, melyeket fentről lefelé, illetve jobbról balra megszámozunk. Nevezzük *törött oszlopnak* valamely nagy sorban lévő 3 kis négyzet ugyanannyiadik kis oszlopait, *törött sornak* valamely nagy oszlopban lévő 3 kis négyzet ugyanannyiadik kis sorait, *pozíciónak* pedig a 9 kis négyzet mindegyikében egy rögzített sorszámú kis sor és egy rögzített sorszámú kis oszlop metszetét. A törött sorok, törött oszlopok és pozíciók tehát

9-9 mezőt tartalmaznak. A *3. ábrán* látható sudoku megoldásra az is igaz, hogy 1-től 9-ig minden szám pontosan egyszer fordul elő minden törött sorban, törött oszlopban és pozícióban. Az ilyen kitöltést *szép megoldásnak* nevezzük. A továbbiakban célunk az összes szép megoldás megadása.

Ehhez először koordinátákkal látjuk el a sudoku tábla mezőit. Számozzuk meg $0, 1, 2$-vel a nagy sorokat, az egyes nagy sorokon belül a sorokat, a nagy oszlopokat és az egyes nagy oszlopokon belül az oszlopokat a *4. ábrán* látható módon fentről lefelé, illetve balról jobbra.



4. ábra

Ekkor minden mezőhöz egy-egy 4 hosszú, a 0, 1, 2 számjegyeket tartalmazó számnégyest rendelhetünk. Az első számjegy legyen a mezőt tartalmazó nagy sorhoz, a második a sorhoz, a harmadik a nagy oszlophoz, a negyedik pedig az oszlophoz rendelt szám. (A *4. ábrán* megjelölt mezőhöz tehát az $(1, 2, 0, 1)$ számnégyest rendeljük.) Így a 81 mezőt megfeleltetjük a 81 db 4 hosszú 0–1–2 számokból álló számnégyesnek. A továbbiakban ezeket a számnégyeseket (a lineáris algebrában megszokott módon) *vektoroknak* nevezzük, és leírásukra az $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ jelölést használjuk. Speciálisan $\mathbf{0}= (0, 0, 0, 0)$.

Értelmezzük két vektor összegét és egy vektor egész számszorosát úgy, ahogy az elemi geometriában a szokásos vektorok esetén megszoktuk, azaz legyen $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ és $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ esetén

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4),$$

valamint tetszőleges α egész szám esetén $\alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4)$. Az összeadást és a szorzást persze modulo 3 végezzük, azaz az egész számok helyett csak azok hármas maradékát tekintjük. Tehát pl. $-1 = 2$, $1 + 2 = 0$ és $2+2 = 2\cdot 2 = 1$. Tetszőleges $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ vektorok és $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ egész számok esetén az $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{x}_k$ vektort az $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ vektorok *lineáris kombinációjának* nevezzük. Ha az $\alpha_1\mathbf{x}_1+\alpha_2\mathbf{x}_2+\ldots+\alpha_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$ egyenlőségből következik, hogy $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, akkor az $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ vektorokat *lineárisan függetleneknek,* egyébként pedig *lineárisan összefüggőeknek* nevezzük.

Legyenek $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{p}$ tetszőleges vektorok. Ekkor az

$$\mathcal{E}_{\mathbf{a},\mathbf{p}} = \{\mathbf{p} + \alpha\mathbf{a} \mid \alpha = 0, 1, 2\}$$

halmazt a $\mathbf{p}$-n átmenő $\mathbf{a}$ irányú *egyenesnek* nevezzük.

Legyenek $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{p}$ tetszőleges vektorok, melyek közül $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ lineárisan függetlenek. Ekkor az

$$\mathcal{S}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{p}} = \{\mathbf{p} + \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} \mid \alpha, \beta = 0, 1, 2\}$$

halmazt a $\mathbf{p}$-n átmenő $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által meghatározott *síknak* nevezzük. Legyenek $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ és $\mathbf{p}$ tetszőleges vektorok, melyek közül $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ lineárisan függetlenek. Ekkor a

$$\mathcal{H}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{p}} = \{\mathbf{p} + \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} \mid \alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2\}$$

halmazt a $\mathbf{p}$-n átmenő $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ által meghatározott *hipersíknak* nevezzük.

Jelölje $\mathcal{N}$ a 81 darab vektor által alkotott halmazt. $\mathcal{N}$ elemeit *pontoknak* nevezzük, az előzőekben definiált egyenesekkel, síkokkal és hipersíkokkal együtt pedig $\mathcal{N}$ a *háromelemű test feletti négydimenziós affin tér.* Itt most ennek csak a legfontosabb tulajdonságait ismertetjük, az érdeklődő olvasó a részleteket megtalálja a [4] könyvben.

Tetszőleges $\mathcal{C} \subset \mathcal{N}$ vektorhalmaz és tetszőleges $\mathbf{x}$ vektor esetén legyen $\mathcal{C} + \mathbf{x} = \{\mathbf{c} + \mathbf{x} \mid \mathbf{c} \in \mathcal{C}\}$. Ezt a halmazt a $\mathcal{C}$ $\mathbf{x}$ vektorral való eltoltjának nevezzük. Az egyeneseket egy-, a síkokat két-, a hipersíkokat pedig háromdimenziós *affin altereknek* hívjuk. Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{A}_1$ és $\mathcal{A}_2$ affin alterek *párhuzamosak,* ha van olyan $\mathbf{x}$ vektor, melyre $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 + \mathbf{x}$ teljesül.

Egyszerűen meggondolható, hogy az affin alterek rendelkeznek a „szokásos” euklidészi geometriából megismert tulajdonságokkal:

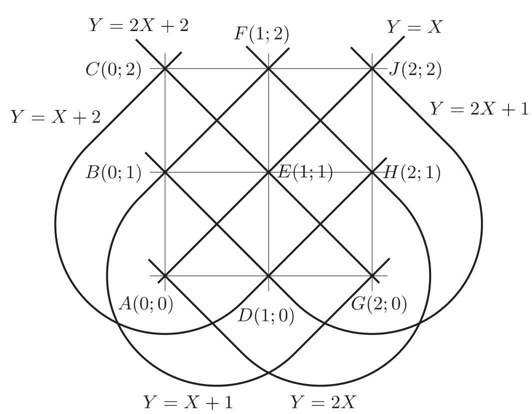
- Két különböző ponthoz pontosan egy olyan egyenes van, amely mindkét pontot tartalmazza.
- Ha három pont nincs egy egyenesen, akkor pontosan egy olyan sík van, amely mindhárom pontot tartalmazza.
- Ha adott a P pont és az $\mathcal{A}$ affin altér, akkor pontosan egy P-n átmenő, $\mathcal{A}$-val párhuzamos affin altér létezik.
- Ha valamely $\mathcal{A}$ affin altér tartalmazza egy $\mathcal{E}$ egyenes két különböző, vagy egy $\mathcal{S}$ sík három nem kollineáris pontját, akkor $\mathcal{A}$ tartalmazza $\mathcal{E}$, illetve $\mathcal{S}$ minden pontját.
- Ha az $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ síkok nem párhuzamosak, akkor vagy pontosan egy közös pontjuk van, s ekkor $\mathcal{S}_1$ bármely eltoltjának is pontosan egy közös pontja van $\mathcal{S}_2$ bármely eltoltjával; vagy pedig metszetük egy egyenes, s ekkor pontosan egy olyan hipersík van, mely $\mathcal{S}_1$-et is és $\mathcal{S}_2$-t is tartalmazza.

Ezen kívül persze olyan tulajdonságaik is vannak, melyek a modulo 3 számolásból adódnak:

- Minden egyenesen 3 pont van.
- Minden síkon 9 pont és 12 egyenes van.
- Minden hipersíkban 27 pont, 117 egyenes és 39 sík van.

Ezeknek a tulajdonságoknak a bizonyítását feladatnak hagyjuk. Segítségként megadjuk $\mathbf{a} = (1,0,0,0)$ és $\mathbf{b} = (0,1,0,0)$ esetén az $\mathcal{S}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{0}}$ sík egy lehetséges leírását. A véges affin síkokról részletesen olvashatunk a lapunk 2006. decemberi számában megjelent [3] cikkben, vagy a [4] könyvben.

Mivel $\mathcal{S}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{0}}$ minden pontjának harmadik és negyedik koordinátája 0, azért csak az első és a második koordinátákat adjuk meg. A síkot legegyszerűbben egy derékszögű koordináta-rendszerrel ellátott klasszikus euklidészi sík mintájára képzelhetjük el, csak most a valós számok helyett a $\{0,1,2\}$ halmaz elemeivel koordinátázunk és modulo 3 számolunk. A sík pontjai az olyan rendezett (a,b) párok, ahol $a,b \in \{0,1,2\}$ (a klasszikus esetben a sík pontjai a valós számokból készített rendezett pároknak felelnek meg). Az egyenesek kétfélék: egyrészt az $[m,d]$ típusú rendezett párok, ahol $m,d \in \{0,1,2\}$, másrészt a $[c]$ típusú elemek, ahol $c \in \{0,1,2\}$ (a klasszikus esetben a sík nem függőleges egyenesei egyértelműen megadhatók m meredekségükkel és azzal a $(0,d)$ ponttal, ahol az Y tengelyt metszik, míg a függőleges egyenesek egyértelműen leírhatók azzal a $(c,0)$ ponttal, ahol az X tengelyt metszik). Két egyenes párhuzamos, ha mindkettő $[c]$ típusú, vagy ha mindkettő $[m,d]$ típusú és a két egyeneshez tartozó m értékek megegyeznek. Az (a,b) pont akkor és csak akkor van rajta az $[m,d]$ egyenesen, ha teljesül, hogy $b \equiv ma + d \pmod 3$ (azaz az $ma + d$ szám 3-mal osztva b-t ad maradékul), a $[c]$ egyenesen pedig pontosan akkor, ha $a = c$. A klasszikus esethez hasonlóan azt mondjuk, hogy az $[m,d]$ egyenes egyenlete $Y = mX + d$, illetve a $[c]$ egyenes egyenlete $X = c$. A síkon tehát $3 \cdot 3 = 9$ pont és $3 \cdot 3 + 3 = 12$ egyenes van. Az *5. ábrán* $\mathcal{S}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{0}}$ pontjai koordinátáikkal, egyenesei pedig (amik persze az *ábrán* nem rajzolhatók meg úgy, mint az euklidészi sík egyenesei) egyenletükkel együtt szerepelnek.



5. ábra

Irodalomjegyzék

[1] Bailey, R., Cameron, P. J. és Connelly, R.: Sudoku, gerechte designs, resolutions, affine space, reguli and Hamming codes, *Amer. Math. Monthly* (2008), 383–404.

[2] Dénes, J. és Keedwell, A. D.: *Latin Squares and their Applications,* Akadémiai Kiadó (Budapest, 1974).

[3] Kiss Gy.: Hogyan szervezzünk körmérkőzéses focibajnokságot? *KöMaL,* **56** (2006), 514–525.

[4] Kiss Gy. és Szőnyi T.: *Véges geometriák,* Polygon Kiadó (Szeged, 2001).