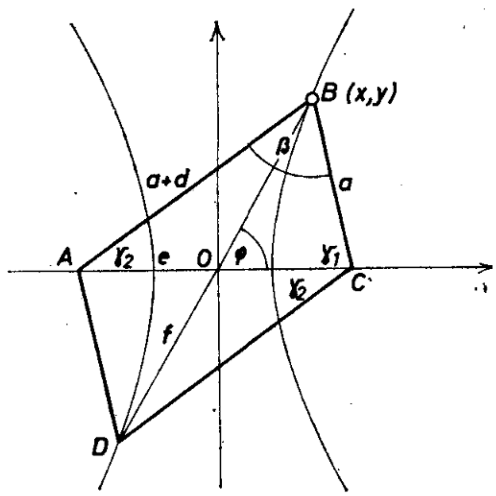
I. megoldás. Legyen az $ABCD$ paralelogrammában $AC = e$, $BA - BC = d$, az így fölvett $BA > BC$ nagyságviszony folytán és $\varphi < 90^\circ$ föltételezésével (φ a BOC szöget jelenti, ahol O az idom középpontja). Legyen továbbá $BC = a$, $BD = f$.



A cosinustétel alkalmazásával az AOB háromszögből

$$(a+d)^2 = \frac{e^2+f^2}{4} + \frac{ef}{2}\cos\varphi,$$

a BOC háromszögből

$$a^2 = \frac{e^2+f^2}{4} - \frac{ef}{2}\cos\varphi,$$

ezekből összeadással és kivonással

$$2a^2 + 2ad + d^2 = \frac{e^2+f^2}{2},$$
$$2ad + d^2 = ef\cos\varphi = gf,$$

ahol rövidítésül $g = e\cos\varphi$. Az utóbbiakból f kiküszöbölésével, majd rendezéssel

$$f^2 = 4a^2 + 4ad + 2d^2 - e^2 = \frac{1}{g^2}(2ad+d^2)^2$$

(1)
$$a^2 + da - \frac{g^2(e^2-2d^2)+d^4}{4(g^2-d^2)} = 0.$$

A gyökök valósak, ha a diszkrimináns

$$d^2 + \frac{g^2(e^2-2d^2)+d^4}{g^2-d^2} = \frac{g^2(e^2-d^2)}{g^2-d^2}$$

pozitív. Ehhez – mivel $g < e$ –, elegendő, hogy a nevezőben $d < g = e\cos\varphi$, azaz $\cos\varphi > d/e$ legyen. (Különben a φ-től függetlenül is, az ABC részháromszög létrejöveséhez szükséges, hogy $d < e$ legyen.) Ha ez teljesül, akkor (1)-nek csak a nagyobbik gyöke pozitív, hiszen a két gyök összege: $-d < 0$, a megoldás egyértelmű.

Áttérve az $ABC\sphericalangle = \beta$ kiszámításának kérdésére, érdekes észrevételt tehetünk. A cosinustételt az ABC háromszögre alkalmazva

$$\cos\beta = \frac{a^2+(a+d)^2-e^2}{2a(a+d)} = 1 - \frac{e^2-d^2}{2(a^2+ad)},$$

és itt a zárójelben (1) bal oldalának első két tagja áll, tehát helyettesíthető az a-t nem tartalmazó tag (-1)-szeresével. Ennek alapján β kiszámításával meg is előzhetjük az oldalakét:

$$\cos\beta = 1 - \frac{2(e^2-d^2)(g^2-d^2)}{g^2(e^2-2d^2)+d^4}.$$

Számadatainkkal (1) pozitív gyöke $a = 23{,}95$, a hosszabb oldal 33,95 egység, végül $\beta = 49^\circ 46'$.

Megjegyzés. Ugyanezen adatokból szerkesztéssel állítottuk elő a paralelogrammát az 1773. sz. gyakorlatban – K. M. L. 57 (1978) 213. oldal. Az itt többször használt g szakasz az ottani OC'-nek a 2-szerese. Gondoljanak utána az érdeklődők: hogyan lehetne számítással követni a szerkesztés lépéseit.

II. megoldás. Válasszuk derékszögű koordináta-rendszerünk x-tengelyéül az $ABCD$ paralelogramma adott hosszúságú $AC=e$ átlójának egyenesét és origónak az idom középpontját; így $A(-e/2,\,0)$ és $C(e/2,\,0)$. Teljesüljön továbbá az idom $B(x,\,y)$ csúcsára $x>0$ és $y>0$. Eszerint $BA>BC$, és így $BA-BC=d$, koordinátákkal kifejezve, majd négyzetre emelés és rendezés után:

$$\sqrt{\left(x+\frac{e}{2}\right)^2+y^2}=d+\sqrt{\left(x-\frac{e}{2}\right)^2+y^2},$$
$$2ex-d^2=2d\sqrt{\left(x-\frac{e}{2}\right)^2+y^2},$$

újabb négyzetre emelés és átrendezés után

$$\frac{4x^2}{d^2}-\frac{4y^2}{e^2-d^2}=1. \tag{2}$$

A négyzetre emelések nyomán itt x és y, másrészt d és e is páros kitevővel szerepel, emiatt ha $B(x,\,y)$ kielégíti ezt, akkor $D(-x,\,-y)$ is, továbbá a tengelyekre való tükörképeik is, amelyekre $B'A-B'C=-d$. (e előjelváltása ugyanezt adja A és C fölcserélésével.) Ez tulajdonképpen az A, C fókuszpárral és a d valós tengelyhosszal meghatározott hiperbola egyenlete.

A BD átlóegyenes egyenlete $y=x\cdot\operatorname{tg}\varphi$, ennek alapján (1)-ből B koordinátái goniometrikus átalakításokkal és az f rövidítést bevezetve

$$x=\frac{d\sqrt{e^2-d^2}\cos\varphi}{2\sqrt{e^2\cos^2\varphi-d^2}}=\frac{f}{2}\cos\varphi(>0),\quad y=\frac{f}{2}\sin\varphi(>0).$$

Könnyű észrevenni, hogy itt

$$f=\frac{d\sqrt{e^2-d^2}}{\sqrt{e^2\cos^2\varphi-d^2}}$$

éppen a BD átló hosszát jelenti. Megoldás van, ha $d<e\cos\varphi(<e)$.

Tovább menve, a már fölírt kifejezésből

$$BC=\sqrt{\left(x-\frac{e}{2}\right)^2+y^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(f\cos\varphi-e)^2+(f\sin\varphi)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{f^2+e^2-2ef\cos\varphi},$$

azonos a COB háromszögből a cosinustétel révén adódó kifejezéssel. A másik oldal ismét $BA=d+BC$.

Végül a paralelogramma szögét a CB és AB félegyenesek iránytangenseiből kapjuk:

$$\operatorname{tg}(180^\circ-\gamma_1)=\frac{y}{x-\dfrac{e}{2}},\quad \operatorname{tg}\gamma_2=\frac{y}{x+\dfrac{e}{2}},$$

és ezekből $BCD\sphericalangle=\gamma_1+\gamma_2$.

A feladat számadataival $f=52{,}70$, $x=11{,}14$, $y=23{,}88$, $BC=23{,}95$, $BA=33{,}95$, $BCD\sphericalangle=85,55^\circ+44,69^\circ=130,24^\circ$, a hegyesszög pedig $49,76^\circ=49^\circ46'$.