

I. rész

1. a) Igazoljuk, hogy $\sqrt[4]{8}$, $\sqrt[4]{18}$ és $\sqrt[4]{50}$ lehet egy derékszögű háromszög három oldalhosszának mérőszáma.
 b) Igazoljuk, hogy

$$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad \text{és} \quad \frac{2\sqrt{3} - 3}{2\sqrt{6} - 3\sqrt{3}}$$

egyenlő.

(10 pont)

Megoldás. a) Legyen $a = \sqrt[4]{8}$, $b = \sqrt[4]{18}$ és $c = \sqrt[4]{50}$. Ekkor $c^2 = \sqrt{50}$, $a^2 + b^2 = \sqrt{8} + \sqrt{18}$.

Mivel $a^2 + b^2 = \sqrt{8} + \sqrt{18} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = \sqrt{50} = c^2$, azért a $\sqrt[4]{8}$, $\sqrt[4]{18}$ és $\sqrt[4]{50}$ a Pitagorasz-tétel megfordítása szerint lehet egy derékszögű háromszög három oldalhosszának mérőszáma.

b) Vegyük mindkét szám $4\sqrt{6 - 3\sqrt{3}}$ -szorosát.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \cdot 4\sqrt{6 - 3\sqrt{3}} &= (\sqrt{6} - \sqrt{2})\sqrt{6 - 3\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2(6 - 3\sqrt{3})} = \\ &= 2\sqrt{21 - 12\sqrt{3}} = 2\sqrt{(2\sqrt{3} - 3)^2} = 2(2\sqrt{3} - 3). \\ \frac{2\sqrt{3} - 3}{2\sqrt{6 - 3\sqrt{3}}} \cdot 4\sqrt{6 - 3\sqrt{3}} &= 2(2\sqrt{3} - 3). \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy az eredeti két szám is egyenlő.

2. a) Oldjuk meg az egész számok halmazán: $(5x + 60)^2 = (-x - 192)^2$.

b) Oldjuk meg a valós számok halmazán: $\sqrt{5x + 60} = \sqrt{-x - 192}$.

c) Oldjuk meg a

$$\sin(5\alpha + 60^\circ) = \sin(-\alpha - 192^\circ)$$

egyenletet, ha $\alpha \in [-180^\circ; 180^\circ]$.

(13 pont)

Megoldás. a) Két eset van: $5x + 60 = -x - 192$ vagy $5x + 60 = -(-x - 192)$. Ezek alapján az egyenlet két megoldása: $x_1 = -42$, $x_2 = 33$.

b) A négyzetgyökök miatt: $5x + 60 \geq 0$ és $-x - 192 \geq 0$, azaz $-12 \leq x$ és $x \leq -192$. Ilyen valós x szám nincs, az egyenletnek nincs valós megoldása.

c) Két eset van.

I. eset: $(5x + 60^\circ) - (-x - 192^\circ) = k_1 \cdot 360^\circ$, ahol k_1 tetszőleges egész szám.

$$6x = -252^\circ + k_1 \cdot 360^\circ, \quad x_1 = -42^\circ + k_1 \cdot 60^\circ.$$

II. eset: $(5x + 60^\circ) + (-x - 192^\circ) = 180^\circ + k_2 \cdot 360^\circ$, ahol k_2 tetszőleges egész szám.

$$4x = 132^\circ + k_2 \cdot 360^\circ, \quad x_2 = 33^\circ + k_1 \cdot 90^\circ.$$

Az első esetben a k_1 lehetséges értékei: $-2, -1, 0, 1, 2, 3$. Ekkor a következő szögeket kapjuk: $-162^\circ, -102^\circ, -42^\circ, 18^\circ, 78^\circ, 138^\circ$.

A második esetben a k_2 lehetséges értékei: $-2, -1, 0, 1$. Ekkor a következő szögeket kapjuk: $-147^\circ, -57^\circ, 33^\circ, 123^\circ$.

Az egyenlet megoldásai a megadott intervallumban:

$$-162^\circ, \quad -147^\circ, \quad -102^\circ, \quad -57^\circ, \quad -42^\circ, \quad 18^\circ, \quad 33^\circ, \quad 78^\circ, \quad 123^\circ, \quad 138^\circ.$$

3. Egy 32 fős osztályban a lányok testmagasságátalaga 165 cm, a fiúké 172 cm.

a) Adjuk meg azt a legszűkebb intervallumot, ahová az osztály testmagasságának átlaga eshet.

b) Évközben érkezett az osztályba egy 170 cm magas lány. A lányok testmagasságátalaga továbbra is egész szám maradt. Hány lány lehetett eredetileg az osztályban? (14 pont)

Megoldás. a) Az osztályban van fiú és lány tanuló is, hiszen beszélhetünk a testmagasságuk átlagáról.

Az osztály testmagasságának átlaga akkor lesz a legkisebb, ha csak egy fiú van. Ekkor az átlag:

$$\frac{31 \cdot 165 + 172}{32} = 165,21875.$$

Az osztály testmagasságának átlaga akkor lesz a legnagyobb, ha csak egy lány van. Ekkor az átlag:

$$\frac{165 + 31 \cdot 172}{32} = 171,78125.$$

Az osztály testmagasságának átlaga a $[165,21875; 171,78125]$ -ba esik, és ennél szűkebb intervallumot nem adhatunk.

b) Eredetileg legyen a lányok száma x . A lányok testmagasságának átlaga az új lány érkezése után:

$$\frac{165x + 170}{x + 1}.$$

Ezt a következő alakban is írhatjuk:

$$\frac{165(x + 1) + 5}{x + 1} = 165 + \frac{5}{x + 1}.$$

Tudjuk, hogy az így kapott szám is egész, ezért $x + 1$ lehetséges értékei: $-5, -1, 1, 5$, vagyis az x lehetséges értékei: $-6, -2, 0, 4$. Mivel az x csak pozitív egész szám lehet, azért az egyedüli lehetőség az $x = 4$.

Az osztályban eredetileg csak 4 lány volt.

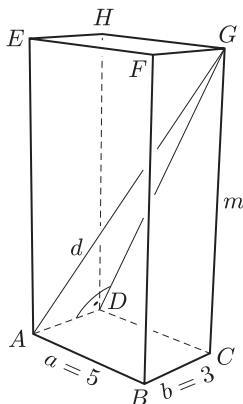
4. Egy téglalap alapú egyenes hasáb alapéleinek hossza 3 és 5, testátlója pedig $\frac{\sqrt{497}}{2}$.

a) Mekkora szöget zár be a testátló a rövidebb alapélel?

b) Mekkora a test felszíne?

c) A feladatban szereplő hasábbal egyenlő magasságú, egyenlő térfogatú négyzetes oszlopot szeretnénk tervezni. Hány százalékkal kell változtatni az alapélek hosszát? (14 pont)

Megoldás. Használjuk az ábra jelöléseit.



a) Az ADG derékszögű háromszögben az A csúcsnál lévő α hegyesszög nagyságát kell meghatároznunk. Tudjuk, hogy $AD = 3$, $AG = \frac{\sqrt{497}}{2}$. Ekkor

$$\cos \alpha = \frac{3}{\frac{\sqrt{497}}{2}},$$

amiből $\alpha \approx 74,4^\circ$.

b) A téglalap alapú egyenes hasáb magasságát még nem ismerjük, legyen ez m . Ez a test egy téglatest, ezért a d testátlója: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + m^2}$. Az ismert szakaszok hosszát behelyettesítve:

$$\frac{\sqrt{497}}{2} = \sqrt{5^2 + 3^2 + m^2}.$$

Ebből kapjuk, hogy $m = \frac{19}{2}$.

A test felszíne:

$$A = 2(ab + am + bm) = 2 \left(15 + \frac{95}{2} + \frac{57}{2} \right) = 182.$$

c) Legyen a négyzetes oszlop alapéle x . Mivel a négyzetes oszlop térfogata egyenlő a téglatest térfogatával, azért

$$3 \cdot 5 \cdot \frac{19}{2} = x^2 \cdot \frac{19}{2}.$$

Ez alapján $x = \sqrt{15}$.

Jelölje p és q azt a számot, ahányszorosára az éleket változtatni kell.

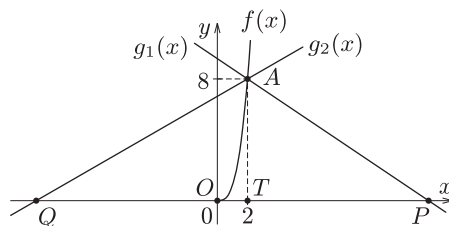
$$p = \frac{\sqrt{15}}{5} \approx 0,775, \quad q = \frac{\sqrt{15}}{3} \approx 1,291,$$

így a hosszabb alapélt kb. 22,5%-kal csökkenteni, a rövidebb alapélt pedig kb. 29,1%-kal növelni kell.

II. rész

5. Az $f(x) = x^3$ a nemnegatív valós és a $g(x) = mx - 2m + 8$ a valós számok halmazán értelmezett függvények (m valós paraméter). A függvények grafikonjai és az x tengely által meghatározott síkidom területe 2010. Határozzuk meg az m paraméter értékét. (16 pont)

Megoldás. A $g(x)$ függvény elsőfokú és az m paraméter a meredeksége. Ha $g(x) = m(x - 2) + 8$ alakban írjuk a hozzárendelési szabályát, akkor belátható, hogy az $A(2; 8)$ koordinátájú pont a függvény grafikonjára minden m esetén illeszkedik. Ez a pont az $f(x)$ függvény képére is illeszkedik. Ezek alapján vázlatrajzot készítünk. Az elsőfokú függvény képét két helyzetben is el tudjuk képzelni úgy, hogy a feladat szövegének eleget tegyen. Ezt a rajzunkon $g_1(x)$ és $g_2(x)$ jelzi.



A $g(x)$ és az x metszéspontja: $P(p; 0)$ vagy $Q(-q; 0)$.

I. eset: Meghatározzuk az OAP síkidom területét.

Az $f(x)$ függvény $[0; 2]$ -hoz tartozó görbealatti területe:

$$\int_0^2 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 4.$$

Az ATP derékszögű háromszög területe:

$$\frac{(p - 2) \cdot 8}{2} = 4(p - 2).$$

Vagyis $4(p - 2) + 4 = 2010$, amiből $p = 503,5$, azaz $P(503,5; 0)$.

Mivel $g_1(x) = m(x - 2) + 8$, és a P pont ismeretében: $0 = m(503,5 - 2) + 8$, azért az egyik keresett meredekség:

$$m_1 = -\frac{16}{1003} \approx -0,01596.$$

II. eset: Meghatározzuk az OAQ síkidom területét. Az $f(x)$ függvény $[0; 2]$ -hoz tartozó görbealatti területe 4. Az ATQ derékszögű háromszög területe:

$$\frac{(q + 2) \cdot 8}{2} = 4(q + 2).$$

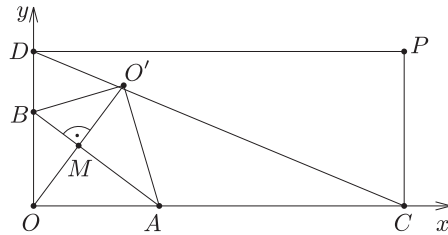
Vagyis $4(q + 2) - 4 = 2010$, amiből $q = 501,5$, azaz $Q(-501,5; 0)$.

Mivel $g_2(x) = m(x - 2) + 8$, és a Q pont ismeretében: $0 = m(-501,5 - 2) + 8$, amiből a másik keresett meredekség:

$$m_2 = \frac{16}{1007} \approx 0,01589.$$

6. Egy 5 cm-szer 12 cm-es téglalap alakú papírlap egyik csúcsából a rövidebb oldalon felmérünk 3 cm-t, a hosszú oldalon pedig 4 cm-t. Az így kapott két pontra illeszkedő egyenes mentén a papírlap ezen csúcsát szeretnénk ráhajtani a csúccsal szemközti átlóra. Sikerülhet ez? Hová kerül a csúcs? (16 pont)

Megoldás. A téglalapot helyezük el a koordinátarendszerben az ábra szerint. A téglalap csúcsai: $O(0; 0)$, $C(12; 0)$, $P(12; 5)$, $D(0; 5)$. Az origóból felmérve kapott pontok: $A(4; 0)$, $B(0; 3)$. Az AB egyenes mentén a téglalap O csúcsát szeretnénk az O -val szemközti CD átlóra hajtani. Meg kell vizsgálnunk, hogy AB -re tükrözve O -t, hová kerül az O' tükörkép. Végezzük el a tükrözést.



Írjuk fel az AB egyenes egyenletét, két pontja ismeretében: $3x + 4y = 12$. Írjuk fel az O pontra illeszkedő AB -re merőleges egyenes egyenletét: $-4x + 3y = 0$. Számítsuk ki a két egyenes M metszéspontjának koordinátáit: $M\left(\frac{36}{25}; \frac{48}{25}\right)$.

Ezután az O' koordinátái is meghatározhatók, hiszen OO' -n M felezőpont: $O'\left(\frac{72}{25}; \frac{96}{25}\right)$.

Írjuk fel a CD egyenes egyenletét (két pontját ismerjük): $5x + 12y = 60$. Helyettesítsük be az O' koordinátáit:

$$5 \cdot \frac{72}{25} + 12 \cdot \frac{96}{25} = \frac{1512}{25} = 60,$$

$48 \neq 60$, vagyis az O' nem illeszkedik a CD átlóra. Az átlóra illeszkedő, $\frac{72}{25}$ első koordinátájú Q pont második koordinátáját is kiszámoljuk behelyettesítéssel: $\frac{95}{25}$.

Vagyis a Q ponthoz képest az O' magasabban van. Az O csúcs a hajtás után átkerül az átló túloldalára.

7. Adott az $AB_1C_1, AB_2C_2, \dots, AB_nC_n, \dots$ egyenlőszárú háromszögek sorozata (n pozitív egész szám). Minden n esetén a háromszög AB_n alapja az x tengely pozitív felére esik olyan módon, hogy az A csúcs az origóban van, az alap hossza pedig $2n$. Tudjuk továbbá, hogy a harmadik csúcs illeszkedik az $f(x) = x^2 + 5$ függvény grafikonjára.

a) Számítsuk ki az AB_1C_1 háromszög kerületét és területét.

b) Melyik háromszögtől kezdve lesz a háromszögek kerülete nagyobb, mint 190?

c) Igazoljuk, hogy mindegyik háromszög területének mérőszáma osztható hattal.

(16 pont)

Megoldás. a) A háromszög csúcsai: $A(0; 0)$, $B_1(2; 0)$, $C_1(1; 6)$. Mivel $AB_1 = 2$, $AC_1 = B_1C_1 = \sqrt{37}$, azért a háromszög kerülete: $k_1 = 2 + 2\sqrt{37} \approx 14,17$. Mivel az AB_1 oldalhoz tartozó magasság 6, azért a háromszög területe: $t_1 = \frac{2 \cdot 6}{2} = 6$.

b) Legyen az első megfelelő háromszög az AB_nC_n . Ennek a háromszögnek a csúcsai: $A(0; 0)$, $B_n(2n; 0)$, $C_n(n; n^2 + 5)$. Mivel

$$AB_n = 2n, \quad AC_n = B_nC_n = \sqrt{n^2 + (n^2 + 5)^2} = \sqrt{n^4 + 11n^2 + 25},$$

azért a háromszög kerülete: $k_n = 2n + 2\sqrt{n^4 + 11n^2 + 25}$.

Keressük a legkisebb pozitív n értéket, amelyre

$$2n + 2\sqrt{n^4 + 11n^2 + 25} > 190, \quad \text{azaz} \quad \sqrt{n^4 + 11n^2 + 25} > 95 - n.$$

Az egyenlőtlenség bal oldalán álló kifejezés növekedő, a jobb oldalon álló pedig csökkenő, ezért néhány próba után megtaláljuk a megfelelő értéket.

Ha $n = 8$, akkor

$$\sqrt{8^4 + 11 \cdot 8^2 + 25} = \sqrt{4825} \approx 69,46, \quad k_8 = 16 + 2 \cdot 69,46 = 154,92 < 190.$$

Vagyis még nem teljesül az egyenlőtlenség.

Ha $n = 9$, akkor

$$\sqrt{9^4 + 11 \cdot 9^2 + 25} = \sqrt{7477} \approx 86,47, \quad k_9 = 18 + 2 \cdot 86,47 = 190,94 > 190.$$

Vagyis már teljesül az egyenlőtlenség.

A kilencedik háromszögtől kezdve mindegyiknek a kerülete nagyobb lesz, mint 190.

c) A következő képlet minden n esetén megadja az AB_nC_n háromszög területét:

$$t_n = \frac{2n(n^2 + 5)}{2} = n(n^2 + 5).$$

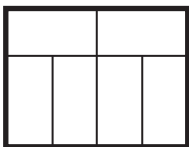
Megmutatjuk, hogy $n(n^2 + 5)$ minden pozitív egész n esetén osztható hattal. Végezzük el a következő átalakításokat:

$$n(n^2 + 5) = n^3 + 5n = n^3 - n + 6n = (n - 1)n(n + 1) + 6n.$$

A második tag osztható hattal. Az első tag három egymást követő egész szám szorzata. Ezen tényezők valamelyike osztható hárommal, és legalább egy tényező a három közül páros. Ezért ez a tag is osztható hattal.

Ezzel beláttuk, hogy mindegyik háromszög területének mérőszáma osztható hattal.

8. Egy iskola ablakainak formáját láthatjuk a mellékelt ábrán.



Az egyik osztályban elhatározták, hogy az ablakok téglalap alakú üveglapjainak közepére legfeljebb egy üvegmatricát ragasztanak.

a) Hányféleképpen lehet elhelyezni a matricákat egy ablakra, ha a hat üvegtáblára négyet terveznek, és a matricák egyformák?

b) Hányféleképpen lehet elhelyezni a matricákat egy ablakra, ha a hat üvegtáblára hármatot terveznek, és a matricák különbözők?

c) Hányféleképpen lehet elhelyezni a matricákat, ha a díszítéshez tengelyesen szimmetrikusan választják ki az üveglapokat, amelyekre egyforma matricákat ragasztanak?

d) Az ablak mind a hat része külön-külön nyitható. Kiválasztanak kettőt véletlenszerűen (egyforma valószínűséggel), amelyeket szellőztetés miatt kinyitnak. Mekkora az esélye, hogy egy hárommatricás ablak esetén, két nem díszített részt fognak kinyitni? (16 pont)

Megoldás. a) A hat üvegtábla közül bármelyik négy kiválasztható, ezért az esetek száma:

$$\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15.$$

Vagyis ebben az esetben 15-féleképpen díszíthető az ablak.

b) A hat üvegtábla közül bármelyik három kiválasztható, ezen választások száma:

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20.$$

Mivel különbözők, azért minden kiválasztás esetén 6-féleképpen lehet felragasztani a matricákat. Ezek alapján ebben az esetben 120 lehetőség van.

c) Az ablakokon a hat üvegtábla egy függőleges tengelyre szimmetrikusan helyezkedik el, három-három a tengely egy-egy oldalán található. Ha a díszítést is tengelyesen szimmetrikusan szeretnénk elhelyezni, akkor az ablak egyik felét az összes lehetséges módon díszítjük, a másik felén pedig szimmetrikusan helyezük el a matricákat.

Az ablak egyik felén lehet 1, 2 vagy 3 darab matrica.

I. Ha 1 db van, akkor az összes eset száma: 3.

II. Ha 2 db van, akkor az összes eset száma: 3.

III. Ha 3 db van, akkor az összes eset száma: 1.

Vagyis ebben az esetben 7-féleképpen díszíthető az ablak.

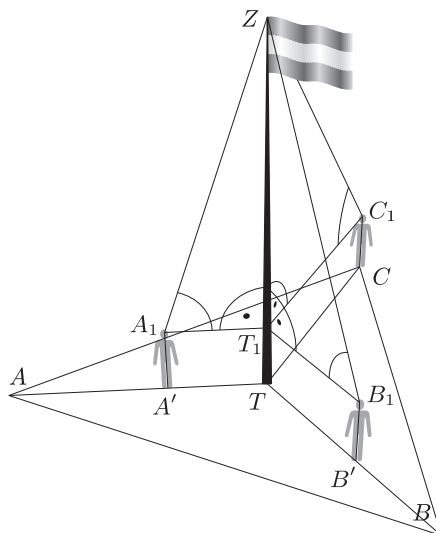
d) A hatból kettőt kiválasztani 15-féleképpen lehet. Bármelyik kettő kiválasztásának ugyanannyi az esélye. Háromra nem ragasztottak matricát. Ezek közül kell kettőt kinyitni, ami háromféleképpen tehető meg. Ezek alapján a keresett valószínűség $\frac{3}{15}$, ami egyszerűsítve $\frac{1}{5}$.

9. A Fő tér szabályos háromszög alakú vízszintes részét díszburkolattal fedték le. A háromszög közepén áll egy magas zászlórúd. A háromszög csúcaiban egy-egy kb. 180 cm magas ember tartózkodik. Ketten elindulnak a zászlórúd felé. Az egyik akkor áll meg, amikor a rúd tetejét 72° -os szögben látja. A másik sétáló akkor áll meg, amikor a rúd tetejét 65° -os szögben látja. A helyben maradó társuk 50° -os szögben látja a zászlórúd tetejét. Ekkor a három ember által meghatározott háromszög területe $23,74 \text{ m}^2$.

a) Milyen magas a zászlórúd?

b) Mekkora a díszburkolattal lefedett rész területe? (16 pont)

Megoldás. Készítsünk ábrát és használjuk az ábra jelöléseit. A szabályos háromszög csúcsai A , B és C , a zászlórúd teteje Z , talppontja az ABC síkon T . Az A pontból induló megfigyelő az AT szakaszon az A' pontig megy, a B -ből induló BT -n a B' pontig. Az A' , B' , C pontban álló megfigyelők szemmagasságának megfelelő pontokat jelölje A_1 , B_1 , C_1 . Az $A_1B_1C_1$ háromszög nyilván egybevágó az $A'B'C$ háromszöggel. Az $A_1B_1C_1\Delta$ középpontja legyen T_1 .



a) Tudjuk, hogy $\angle ZA_1T_1 = 72^\circ$, $\angle ZB_1T_1 = 65^\circ$, $\angle ZC_1T_1 = 50^\circ$, továbbá

$$\begin{aligned} \angle ATB &= \angle BTC = \angle CTA = \angle A_1T_1B_1 = \\ &= \angle B_1T_1C_1 = \angle C_1T_1A_1 = 120^\circ. \end{aligned}$$

Legyen $T_1Z = x$, ekkor

$$T_1C_1 = \frac{x}{\operatorname{tg} 50^\circ}, \quad T_1B_1 = \frac{x}{\operatorname{tg} 65^\circ}, \quad T_1A_1 = \frac{x}{\operatorname{tg} 72^\circ}.$$

A szöveg szerint az $A'B'C'$ és a vele egybevágó $A_1B_1C_1$ háromszög területe $23,74 \text{ m}^2$.

Ezen háromszög területe egyenlő az $A_1T_1B_1$, $B_1T_1C_1$, $C_1T_1A_1$ háromszögek területének összegével. Használjuk a szinuszos területképletet, ekkor:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{\operatorname{tg} 72^\circ \operatorname{tg} 65^\circ} + \frac{x^2}{\operatorname{tg} 65^\circ \operatorname{tg} 50^\circ} + \frac{x^2}{\operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg} 72^\circ} \right) \cdot \sin 120^\circ = 23,74.$$

Ebből kapjuk, hogy $x \approx 8,2 \text{ m}$. Tudjuk, hogy $TT_1 = 1,8 \text{ m}$ (az emberek magassága a szöveg szerint ennyinek vehető).

Vagyis a zászlórúd magassága kb. 10 méter.

b) Tudjuk, hogy $T_1C_1 = \frac{8,2}{\operatorname{tg} 50^\circ}$, és $T_1C_1 = TC = TB = TA$. Most is használhatjuk a szinuszos területképletet.

Ekkor

$$t_{ABC} = t_{ATB} + t_{BTC} + t_{CTA} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{8,2^2}{\operatorname{tg}^2 50^\circ} \cdot \sin 120^\circ \approx 61,5.$$

A díszburkolattal lefedett rész területe kb. $61,5 \text{ m}^2$.