[1]

A1. Legyen f a sík pontjain értelmezett valós értékű függvény, amelyre teljesül, hogy a síkban minden $ABCD$ négyzetre $f(A)+f(B)+f(C)+f(D)=0$. Következik-e ebből, hogy a sík minden P pontjára $f(P)=0$?

A2. Az f, g, h függvények differenciálhatók valamely 0-t tartalmazó nyílt intervallumon, és kielégítik az alábbi egyenleteket és kezdeti feltételeket:

$$f' = 2f^2gh + \frac{1}{gh}, \qquad f(0)=1,$$

$$g' = fg^2h + \frac{4}{fh}, \qquad g(0)=1,$$

$$h' = 3fgh^2 + \frac{1}{fg}, \qquad h(0)=1.$$

Keressen explicit kifejezést $f(x)$-re, mely megfelel a feltételeknek valamely 0-t tartalmazó nyílt intervallumon.

A3. Legyen d_n annak az $n\times n$-es mátrixnak a determinánsa, amely balról jobbra és felülről lefelé haladva a $\cos 1, \cos 2, \dots, \cos n^2$ elemekből áll. (Például

$$d_3 = \begin{vmatrix} \cos 1 & \cos 2 & \cos 3 \\ \cos 4 & \cos 5 & \cos 6 \\ \cos 7 & \cos 8 & \cos 9 \end{vmatrix}.$$

A koszinuszok argumentumai radiánban értendők.)

Határozza meg a $\lim\limits_{n\to\infty} d_n$ határértéket.

A4. Legyen S olyan racionális számokból álló halmaz, amelyre
(a) $0\in S$;
(b) ha $x\in S$, akkor $x+1\in S$ és $x-1\in S$; valamint
(c) ha $x\in S$ és $x\notin\{0,1\}$, akkor $1/\big(x(x-1)\big)\in S$.
Szükségszerű-e, hogy S tartalmazzon minden racionális számot?

A5. Létezik-e olyan véges kommutatív G csoport, amelyben az összes elem rendjének szorzata 2^{2009}?

A6. Legyen a zárt egységnégyzeten értelmezett $f\colon [0,1]^2\to\mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, amelyre $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ és $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ létezik és folytonos a négyzet $(0,1)^2$ belsején. Legyen

$$a=\int_0^1 f(0,y)\,dy,\quad b=\int_0^1 f(1,y)\,dy,\quad c=\int_0^1 f(x,0)\,dx,\quad d=\int_0^1 f(x,1)\,dx.$$

Igaz-e, hogy biztosan létezik olyan (x_0,y_0) pont a négyzet belsejében, amelyre

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=b-a \quad \text{és} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=d-c?$$

Állítását bizonyítsa.

B1. Bizonyítsa be, hogy minden pozitív racionális szám felírható olyan tört alakban, ahol a számláló és a nevező is (nem szükségképpen különböző) prímszámok faktoriálisainak szorzata. Például

$$\frac{10}{9}=\frac{2!\cdot 5!}{3!\cdot 3!\cdot 3!}.$$

B2. Egy játék során a számegyenesen kell ugrálni balról jobb felé haladva. Ha a és b valós számok és $b>a$, akkor az a-ból b-be való ugrás költsége b^3-ab^2. Melyek azok a c valós számok, amelyekre lehetséges eljutni 0-ból 1-be véges számú ugrással úgy, hogy az ugrások összköltsége pontosan c legyen?

B3. Az $\{1,2,\dots,n\}$ halmaz S részhalmazát nevezzük *középszerűnek,* ha rendelkezik az alábbi tulajdonsággal: amennyiben az S-beli a és b elemek átlaga egész, akkor az átlag is hozzátartozik az S halmazhoz. Legyen $A(n)$ az $\{1,2,\dots,n\}$ halmaz középszerű részhalmazainak száma. (Az $\{1,2,3\}$ halmaznak például $\{1,3\}$ kivételével minden

[1]A versenyről megjelent ismertetés lapunk 2005/2. számában olvasható, a 71–72. oldalon. A verseny honlapja: `http://math.scu.edu/putnam/index.html`, a megoldások a `http://www.unl.edu/amc/a-activities/a7-problems/putnamindex.shtml` honlapon találhatók.

részhalmaza középszerű, így $A(3) = 7$.) Határozza meg az összes olyan n pozitív egészet, amelyre $A(n+2) - 2A(n+1) + A(n) = 1$.

B4. Azt mondjuk, hogy az x, y változókon értelmezett valós együtthatós kétváltozós polinom *kiegyensúlyozott,* ha a polinom értékeinek átlaga minden origó középpontú körre 0. A legfeljebb 2009-edfokú kiegyensúlyozott polinomok $\mathbb{R}$ fölött V vektorteret alkotnak. Határozza meg V dimenzióját.

B5. Legyen $f\colon (1,\infty) \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, amelyre

$$f'(x) = \frac{x^2 - \big(f(x)\big)^2}{x^2\Big(\big(f(x)\big)^2 + 1\Big)} \qquad \text{minden } x > 1 \text{ esetén.}$$

Bizonyítsa be, hogy $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

B6. Bizonyítsa be, hogy minden n pozitív egészre létezik egész számoknak olyan $a_0, a_1, \ldots, a_{2009}$ sorozata, ahol $a_0 = 0$, $a_{2009} = n$, és a_0 után minden tag vagy valamely korábbi tagból 2^k hozzáadásával kapható, ahol k nemnegatív egész, vagy pedig $b \bmod c$ alakú, ahol b és c mindketten a sorozat korábbi pozitív tagjai. [$b \bmod c$ a b-nek c-vel való osztási maradékát jelöli, így $0 \le (b \bmod c) < c$.]