1. feladat. *Egy $n \times k$-as táblázatba úgy írunk be egész számokat, hogy mind az n sorban szerepeljen 1-től k-ig minden egész szám. Jelöljük S-sel a kapott k oszlopösszeg legnagyobbikát. Minden n-re és k-ra adjuk meg S lehetséges legkisebb értékét!*

Megoldás. A feladat szövegéből adódóan n és k pozitív egészek. Világos, hogy $n = 1$ esetén $S = k$, ezért a továbbiakban feltesszük, hogy $n \geq 2$. A táblázat minden sorában a beírt számok összege $1 + 2 + \ldots + k = \frac{1}{2}k(k+1)$, így a táblázatbeli számok összege $\frac{1}{2}nk(k+1)$. A k oszlop valamelyikében tehát az összeg legalább $\frac{1}{2}n(k+1)$, vagyis $S \geq \frac{1}{2}n(k+1)$. Ebből

$$S \geq \left\lceil \frac{1}{2}n(k+1) \right\rceil$$

[1]

következik, tekintve, hogy S a definíciójából adódóan egész szám. Megmutatjuk, hogy $n \geq 2$ esetén ez lesz az S pontos értéke. Ehhez azt kell igazolni, hogy létezik olyan táblázatkitöltés, amiben minden oszlopösszeg legfeljebb

$$\left\lceil \frac{1}{2}n(k+1) \right\rceil.$$

Ha n páros, akkor könnyű ilyet találni: a páratlanodik sorokba növekvő, a páros sorszámúakba csökkenő sorrendben írjuk be az egészeket. Ezáltal az i-edik oszlopösszeg

$$\frac{n}{2}i + \frac{n}{2}(k+1-i) = \frac{1}{2}n(k+1)$$

lesz. Ha n páratlan (és $n \geq 3$), akkor is megtehetjük, hogy az első $n-3$ sort a fentiek szerint töltjük ki (hiszen páros számú sorról van szó), és ezáltal minden oszlopban az első $n-3$ elem összege $\frac{1}{2}(n-3)(k+1)$ lesz. Ahhoz tehát, hogy minden oszlopban az összeg legfeljebb

$$\left\lceil \frac{1}{2}n(k+1) \right\rceil$$

legyen, az szükséges, hogy a táblázat utolsó három sorát úgy töltsük ki, hogy minden oszlop utolsó három elemének összege legfeljebb

$$\left\lceil \frac{1}{2}n(k+1) \right\rceil - \frac{1}{2}(n-3)(k+1) = \left\lceil \frac{1}{2}n(k+1) - \frac{1}{2}(n-3)(k+1) \right\rceil = \left\lceil \frac{3}{2}(k+1) \right\rceil$$

legyen. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy az utolsó 3 sorba egy a feladatban leírt $3 \times k$ méretű táblázatot kell elhelyeznünk. A továbbiakban tehát az $n = 3$ esetre szorítkozunk.

Ha $k = 2m+1$ páratlan, azaz $S = \frac{3(k+1)}{2} = 3(m+1)$, akkor az alábbi módon kitöltött táblázat megfelel a célnak:

1	2	$\ldots$	i	$\ldots$	$m+1$	$m+2$	$\ldots$	j	$\ldots$	$2m+1$
$2m+1$	$2m-1$	$\ldots$	$2m+3-2i$	$\ldots$	1	$2m$	$\ldots$	$4m+4-2j$	$\ldots$	2
$m+1$	$m+2$	$\ldots$	$m+i$	$\ldots$	$2m+1$	1	$\ldots$	$j-m-1$	$\ldots$	m

Ha pedig $k = 2m$ páros szám és

$$S = \left\lceil \frac{3(k+1)}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{6m+3}{2} \right\rceil = 3m+2,$$

akkor például az alábbi módon tölthetjük ki a $3 \times k$ méretű táblázatot:

1	2	$\ldots$	i	$\ldots$	m	$m+1$	$\ldots$	j	$\ldots$	$2m$
$2m$	$2m-2$	$\ldots$	$2m+2-2i$	$\ldots$	2	$2m-1$	$\ldots$	$4m+1-2j$	$\ldots$	1
$m+1$	$m+2$	$\ldots$	$m+i$	$\ldots$	$2m$	1	$\ldots$	$j-m$	$\ldots$	m

Könnyen ellenőrizhető, hogy mindkét táblázatban minden sorban szerepel 1 és k között az összes egész, továbbá, hogy egyetlen oszlopösszeg sem nagyobb S-nél. □

2. feladat. *Határozzuk meg azokat a pozitív egészekből álló (a, b) számpárokat, amelyekre igaz az alábbi állítás: a pozitív egészek halmaza felbontható két diszjunkt halmaz, H_1 és H_2 uniójára úgy, hogy sem a, sem b nem írható fel sem két H_1-beli, sem két H_2-beli szám különbségeként.*

[1] $\lceil x \rceil$ az x szám felső egész része; a legkisebb egész szám, amely nem kisebb x-nél.

Megoldás. Tekintsük az $1, 1+a, 1+2a, 1+3a, \ldots$, illetve az $1, 1+b, 1+2b, 1+3b, \ldots$ sorozatokat. E két sorozat bármelyikére igaz, hogy két szomszédos elemének különbsége a vagy b, ezért semelyik két szomszédos elem sem lehet a H_1 és H_2 halmazok közül ugyanabban. Más szóval mindkét sorozat felváltva tartalmaz H_1 és H_2-beli elemeket. Azt kaptuk tehát, hogy az $1+ka$ és az $1+\ell b$ egészek pontosan akkor vannak ugyanabban a halmazban, ha k és ℓ paritása megegyezik (hiszen mindkét sorozat első eleme 1).

Legyen n, illetve m az a, illetve b kanonikus alakjában a 2 prímtényező kitevője, azaz $a = 2^n a'$ és $b = 2^m b'$, ahol a', illetve b' páratlan számok. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $n \geq m$ teljesül. Tekintsük az $x := 1+2^n a' b'$ számot. Mivel $x = 1+b'a$ ugyanabban a halmazban van, mint $x = 1+a'2^{n-m}b$, a fenti megfigyelésünkből az adódik, hogy b' és $a'2^{n-m}$ paritása megegyezik, vagyis $a'2^{n-m}$ páratlan, ami csak úgy lehetséges, ha $n-m=0$, azaz ha $n = m$. Azt kaptuk tehát, hogy ha lehetséges a pozitív egészeket két halmaz uniójára bontani a feladatban leírt módon, akkor a és b kanonikus alakjában a 2 prímtényező ugyanazon a kitevőn szerepel.

A megoldást annak megmutatásával fejezzük be, hogy ebben az esetben (tehát ha $n = m$) megadható a kívánt felbontás. Legyen ugyanis

$$H_1 := \left\{ k \in \mathbb{Z} \colon k > 0 \text{ és } \left\lfloor \frac{k}{2^n} \right\rfloor \text{ páratlan} \right\}, \quad \text{illetve}$$

$$H_2 := \left\{ k \in \mathbb{Z} \colon k > 0 \text{ és } \left\lfloor \frac{k}{2^n} \right\rfloor \text{ páros} \right\}.$$

[2]

Ez a választás megfelelő, hiszen ha $x - y = a$, akkor $x = y + a$, tehát

$$\left\lfloor \frac{x}{2^n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{y+a}{2^n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{y}{2^n} + \frac{a}{2^n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{y}{2^n} + a' \right\rfloor = \left\lfloor \frac{y}{2^n} \right\rfloor + a'.$$

Mivel a' páratlan, ez azt jelenti, hogy x és y egyike H_1-beli, a másik pedig H_2 eleme. Hasonlóan látható, hogy ha két pozitív egész különbsége b, akkor azok különböző halmazokból valók:

$$x - y = b \Rightarrow x = y + b \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{2^n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{y+b}{2^n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{y}{2^n} + \frac{b}{2^n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{y}{2^n} + b' \right\rfloor = \left\lfloor \frac{y}{2^n} \right\rfloor + b'.$$

Azt kaptuk tehát, hogy pontosan akkor létezik a feladatban leírt felbontás, ha a és b prímtényezős felbontásában a 2 prím ugyanazon a kitevőn szerepel. $\square$

Megjegyzések. 1. Könnyen látható, hogy ha a és b pontosan ugyanazokkal a 2-hatványokkal osztható, akkor a pozitív egészeknek a feladat szerinti bármely felbontása úgy áll elő, hogy a 2^n szerinti maradékosztályok elemeit „felváltva" tesszük H_1-be és H_2-be.

2. Ha a H_1-ben, illetve H_2-ben fellépő különbségekből nem két számot (a-t és b-t) tiltunk meg, hanem többet, akkor a megoldásban leírt módszerrel igazolható, hogy pontosan akkor létezik a kívánt partíció, ha a tiltott számok mindegyikének kanonikus alakjában ugyanazzal a kitevővel szerepel a 2 prímosztó. A lehetséges halmazokba osztások itt is pontosan úgy kaphatók, ahogy azt az 1. megjegyzésben leírtuk.

3. Nagy Dániel azt figyelte meg, hogy három halmaz (H_1, H_2 és H_3) uniójára mindig felbonthatók a pozitív egészek úgy, hogy semelyik halmazon belül se lépjen fel a vagy b különbség. Ez a tény a „mohó színezés" erre az esetre történő alkalmazásával igazolható: sorra eldöntjük az $1, 2, 3, \ldots$ számokról, hogy a H_i halmazok közül melyikbe tesszük. Konkrétan: a soron következő k pozitív egészhez úgy választjuk a k-t tartalmazó halmazt, hogy k ne legyen egy halmazban a korábban már valamelyik halmazba besorolt $(k-a)$ és $(k-b)$ számok egyikével sem. Mivel három halmazunk van, ezt mindig megtehetjük. Ezzel a módszerrel minden pozitív egészt a H_1, H_2 és H_3 halmazok közül pontosan egyhez rendelünk, és a konstrukcióból adódóan az így kapott felbontás rendelkezik a kívánt tulajdonsággal. Az is könnyen látható, hogy ha a 2. megjegyzésben leírtak szerint több tiltott számunk van (mondjuk ℓ), akkor a pozitív egészek halmaza bizonyosan felbontható $\ell + 1$ halmaz uniójára a feladatban leírt módon.

3. feladat. *Határozzuk meg azokat az f függvényeket, amelyekre*
(i) f az egész számok halmazán van értelmezve;
(ii) $f(z)$ racionális szám minden z egész szám esetén;
(iii) ha $f(x) < c < f(y)$ és c racionális, akkor f felveszi a c értéket; és
(iv) ha x, y, z egészek és összegük nulla, akkor

$$f(x) + f(y) + f(z) = f(x)f(y)f(z)$$

teljesül.

Megoldás. Vegyük észre, hogy az $f \equiv 0$ függvény teljesíti a feladatban leírt feltételeket. Megmutatjuk, hogy ezen kívül nincs más ilyen tulajdonságú függvény.

[2] Egy x szám $\lfloor x \rfloor$ alsó egész része (vagy egész része) az a legnagyobb egész szám, amely nem nagyobb x-nél.

A (iv) feltételből $x=y=z=0$ helyettesítéssel adódik, hogy $3f(0)=f(0)^3$, azaz $f(0)\big(f(0)^2-3\big)=0$. Innen $f(0)=0$ vagy $f(0)^2=3$ következik, ám az utóbbi lehetőség ellentmond (ii)-nek, így $f(0)=0$. Ezek után $y=-x$ és $z=0$ helyettesítéssel (iv) $f(x)+f(-x)=0$ alakot ölt, tehát $f(x)=-f(-x)$ teljesül minden x egész számra, vagyis f páratlan függvény. Végül az $y=x$ és $z=-2x$ helyettesítéssel (iv)-ből azt kapjuk, hogy $2f(x)-f(2x)=-f(x)^2f(2x)$, azaz

$$2f(x)=f(2x)\big(1-f(x)^2\big). \tag{1}$$

Tegyük fel tehát, hogy $f\not\equiv 0$, azaz van olyan x egész, amire $f(x)\neq 0$. Ekkor (1) bal oldala nemnulla, így a jobb oldal sem lehet zérus, tehát $\big|f(x)\big|\neq 1$ teljesül minden olyan x egészre, ami nem gyöke f-nek. Más szóval az f függvény nem veszi fel az 1 és -1 értékek egyikét sem. Láttuk, hogy $f(0)=0$, ezért (iii) miatt $\big|f(n)\big|<1$ teljesül minden n egészre. Ha tehát $0<\big|f(x)\big|<1$, akkor (1) miatt

$$\big|f(2x)\big|=\left|\frac{2f(x)}{1-f(x)^2}\right|=\frac{|2f(x)|}{\big|1-f(x)^2\big|}>\frac{2\big|f(x)\big|}{1}=2\big|f(x)\big|$$

adódik, azaz $\big|f(2^nx)\big|>2^n\big|f(x)\big|$, ha $n>1$ egész. Legyen n olyan pozitív egész, amire $2^n>\dfrac{1}{|f(x)|}$ teljesül. Ekkor

$$\big|f(2^nx)\big|>2^n\big|f(x)\big|>\frac{1}{\big|f(x)\big|}\big|f(x)\big|=1,$$

márpedig ez ellentmond a fenti megfigyelésnek, ami szerint $|f|<1$. Tehát $f\equiv 0$ az egyedüli olyan függvény, ami teljesíti az (i)–(iv) feltételeket. $\square$

Megjegyzés. Többen észrevették, hogy a feladat (iv) feltétele teljesül a tangens függvényre. Ez a megfigyelés, mint láttuk, nem szükséges a megoldáshoz, de ennek ismerete rávilágít annak ötletére. Ha ugyanis az f függvényre fennáll a (iv) tulajdonság, akkor $\alpha:=\operatorname{arcctg}\big(f(1)\big)$ választással tetszőleges n pozitív egészre $f(n)=\operatorname{tg}(n\cdot\alpha)$ adódik. Mivel $\operatorname{tg}\big(\pm\frac{\pi}{2}\big)$ nem értelmes, azért $n\cdot\alpha=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$ semmilyen egész n, k esetén sem teljesülhet, így olyan egész m sem létezik, amire $\operatorname{tg}(m\alpha)=\pm1$ áll. A (iii) feltétel miatt ekkor $|f|<1$, márpedig ha $\operatorname{tg}(\alpha)\neq 0$, akkor az α alkalmas többszörösének tangense 1-nél nagyobb abszolút értékű lesz.