I. rész

1. *Oldjuk meg a következő egyenletet az egész számok halmazán:*

$$|45x-8|+7\cdot 2^{x+4}+\log_2^2(x-2)+\sqrt{4x+2009}=2010.$$

(*11 pont*)

Megoldás. Az egyenlet értelmezési tartományát megvizsgálva kapjuk, hogy $x>2$ (ez a legerősebb feltétel, a logaritmus értelmezése miatt). Mivel x egész szám, azért $x\geq 3$. Másrészt mivel a bal oldalon minden tag nemnegatív, azért $x\leq 4$, hiszen $x=5$ esetén $7\cdot 2^{x+4}$ már nagyobb 2010-nél (és a szigorú monoton növekedése miatt értéke 5-nél nagyobb x-ekre még nagyobb lesz).

Vagyis csak $x=3$ és $x=4$ jöhet szóba, ezek közül behelyettesítéssel adódik, hogy az egyenlet egyetlen egész gyöke $x=4$.

2. *Egy háromszög egyik oldala $a=10$, a rajta fekvő két szög $\beta=50^\circ$ és $\gamma=60^\circ$. Számítsuk ki annak a forgástestnek a térfogatát, amelyet úgy kapunk, hogy a háromszöget megforgatjuk a leghosszabb oldala körül.* (*12 pont*)

Megoldás. A megadott szögek alapján $\alpha=70^\circ$, így a leghosszabb az a oldal, ekörül forgatjuk meg a háromszöget. A keletkező forgástestet tekinthetjük két, közös alapkörű forgáskúpnak, ahol az alapkör sugara a háromszög a oldalához tartozó m_a magassága lesz.

A háromszög területét kétféleképpen felírva:

$$\frac{a\cdot m_a}{2}=\frac{a^2\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}{2\cdot\sin\alpha},\quad \text{amiből}\quad m_a\approx 7{,}06.$$

A kúpok magasságát m_1-gyel és m_2-vel jelölve térfogatuk:

$$V_1+V_2=\frac{m_a^2\pi\cdot m_1}{3}+\frac{m_a^2\pi\cdot m_2}{3}=\frac{m_a^2\pi}{3}(m_1+m_2),\quad \text{ahol}\quad m_1+m_2=10.$$

A kérdezett térfogat: $V=\dfrac{7{,}06^2\cdot\pi}{3}\cdot 10\approx 521{,}96$.

3. *a) Határozzuk meg az alábbi halmazok elemeit.*

$A=\{\log_3(x-6)<2$ *egyenlőtlenség egész gyökei*$\}$;

$B=\{$20-*nál kisebb pozitív egészek, melyeknek legalább* 4 db *osztójuk van*$\}$;

$C=\{$*A számjegyek összegének lehetséges értékei az olyan háromjegyű számokban, amelyeknek a számjegyei számtani sorozatot alkotnak*$\}$.

b) Adjuk meg a $(C\setminus A)\cup(A\cap B)$ halmaz elemeit. (*14 pont*)

Megoldás. *a)* Az A halmaz esetén a logaritmus definíciója szerint $x-6<3^2$ és $x-6>0$, vagyis:

$$A=\{7;8;9;10;11;12;13;14\}.$$

A szöveg szerint:

$$B=\{6;8;10;12;14;15;16;18\}.$$

A C halmaznál mivel a számjegyek összege a középső számjegy 3-szorosa, azért a halmaz elemei 3-mal oszthatók. A legkisebb a 3 lehet, a legnagyobb pedig a 27 (amelyek között mindegyik elő is fordulhat megfelelő számjegyek összegeként), vagyis:

$$C=\{3;6;9;12;15;18;21;24;27\}.$$

b) A kapott halmazok alapján:

$$C\setminus A=\{3;6;15;18;21;24;27\},$$
$$A\cap B=\{8;10;12;14\},$$
$$\text{vagyis:}\quad (C\setminus A)\cup(A\cap B)=\{3;6;8;10;12;14;15;18;21;24;27\}.$$

4. *A $[-2;2]$ mely x elemeire igaz, hogy $\sin x$, $2\operatorname{tg}2x$ és $3\cos x$ egy mértani sorozat szomszédos elemei ebben a sorrendben?* (*14 pont*)

Megoldás. Mivel a mértani sorozat tagjai között nem lehet 0, azért $\sin x\neq 0$, $\cos x\neq 0$ és $\operatorname{tg}2x\neq 0$, azaz $x\neq k\dfrac{\pi}{2}$, ahol $k\in\mathbb{Z}$.

A mértani sorozatban a középső tag négyzete egyenlő két szomszédjának szorzatával, ezért $4\operatorname{tg}^2 2x = 3\sin x\cos x$. Ebből

$$8\operatorname{tg}^2 2x = 3\cdot 2\sin x\cos x, \quad \text{azaz} \quad 8\frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x} = 3\cdot\sin 2x.$$

A kikötés miatt oszthatunk $\sin 2x$-szel, majd rendezés után (felhasználva, hogy $\cos^2 2x = 1-\sin^2 2x$) kapjuk, hogy $3\sin^2 2x + 8\sin 2x - 3 = 0$. Ennek gyökei: $(\sin 2x)_1 = -3$ és $(\sin 2x)_2 = \frac{1}{3}$. (A -3 nyilván nem lehet megoldás.)

a) $2x \approx 0{,}340 + k_1\cdot 2\pi$ ($k_1\in\mathbb{Z}$), amiből $x\approx 0{,}170 + k_1\cdot\pi$. Ezek közül csak $k_1 = 0$ esetben esik a gyök a $[-2;2]$-ba.

b) $2x \approx 2{,}802 + k_2\cdot 2\pi$ ($k_2\in\mathbb{Z}$), amiből $x\approx 1{,}401 + k_2\cdot\pi$. Ezek közül $k_2 = 0$ és $k_2 = -1$ esetben esnek a gyökök a $[-2;2]$-ba.

Tehát a feladat három megoldása: $x_1\approx 0{,}170$, $x_2\approx 1{,}401$ és $x_3\approx -1{,}741$.

Ellenőrizhető, hogy a kapott értékek valóban megfelelnek a feladat feltételeinek.

II. rész

5. *Az A pont illeszkedik az*

$$e\colon 2x - y + 4 = 0,$$

a B pont pedig az

$$f\colon 2x + 3y - 8 = 0$$

egyenletű egyenesre. Határozzuk meg az A és B pontok koordinátáit, ha az AB szakasz felezőpontja $F(5;4)$. (*16 pont*)

Megoldás. Az e egyenest tükrözve az F pontra, az A pont a B-be kerül. Ezért ha az e egyenest tükrözzük F-re, akkor a tükörkép az f egyenest B-ben fogja metszeni. Felírjuk az e egyenesnek F-re vonatkozó e' tükörképének egyenletét. Ehhez vesszük e két tetszőleges pontját, pl. $P(0;4)$ és $Q(1;6)$, ezek F-re vonatkozó tükörképei $P'(10;4)$ és $Q'(9;2)$, a rajtuk áthaladó egyenes egyenlete $e'\colon 2x - y = 16$.

Kiszámítjuk e' és f metszéspontjának koordinátáit. Megoldva az e' és az f egyenleteiből álló egyenletrendszert kapjuk, hogy $B(7;-2)$.

B pontnak F-re való tükörképe adja: $A(3;10)$.

6. *a) Határozzuk meg a P és Q pontok koordinátáit, ha P az*

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$$

függvény inflexiós pontja, Q első koordinátája f lokális maximumhelye, második koordinátája pedig a lokális maximum értéke.

b) Írjuk fel a g másodfokú függvény hozzárendelési szabályát, ha g képének tengelypontja a P pont és a grafikon áthalad a Q ponton is.

c) Számítsuk ki a két függvény grafikonja által közrefogott P és Q csúcsokkal rendelkező síkidom területét. (*16 pont*)

Megoldás. *a)* $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$, ennek zérushelyei -1 és 3. Mivel az f függvény (a harmadfokú tag pozitív együtthatója miatt) az első lokális szélsőértékig növekvő, azért -1 a lokális maximumhely. A Q pont második koordinátáját pedig behelyettesítéssel kapjuk: $(-1)^3 - 3\cdot(-1)^2 - 9(-1) + 2 = 7$.

$f''(x) = 6x - 6$, ennek zérushelye 1, ez P első koordinátája. A második pedig

$$1 - 3 - 9 + 2 = -9.$$

Tehát $P(1;-9)$, $Q(-1;7)$.

b) Mivel a parabola tengelypontja $P(1;-9)$, hozzárendelési szabálya:

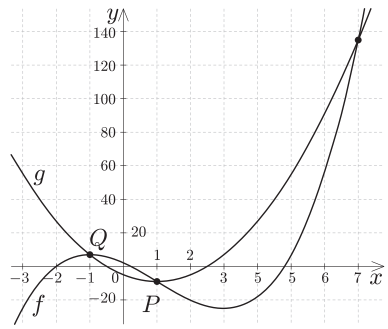
$$g(x) = a\cdot(x-1)^2 - 9$$

alakú ($a\in\mathbb{R}$). Behelyettesítve Q koordinátáit: $7 = a\cdot(-2)^2 - 9$, amiből $a = 4$. Tehát $g(x) = 4\cdot(x-1)^2 - 9$, azaz $g(x) = 4x^2 - 8x - 5$.

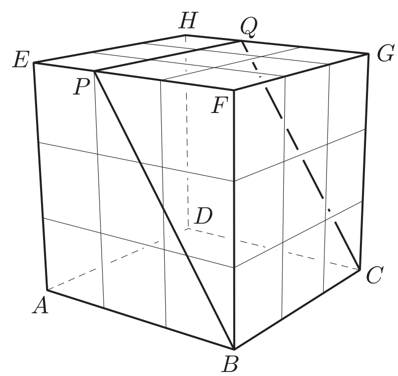
c) A kérdezett terület:

$$\left|\int_{-1}^{1}\left[f(x) - g(x)\right]dx\right| = \left|\int_{-1}^{1}(x^3 - 7x^2 - x + 7)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 7x\right]_{-1}^{1}\right| = \frac{28}{3}.$$

Bár nem volt feladat ábrázolni, a két függvény grafikonja (illetve azok egy részlete) így néz ki:



7. *Néhány egybevágó, egység élű kocka 3-3 lapját befestjük pirosra, mindegyik kockát egyformán, úgy, hogy egy közös csúcsban találkozó három lap legyen színes. 8 ilyen kockából egy $2\times2\times2$-es nagyobb kockát építünk úgy, hogy a kis kockákat véletlenszerűen helyezzük egymásra.*



a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a nagy kocka minden lapja (teljesen) piros?

b) Mekkora lenne ez a valószínűség, ha 27 kis kockából $3\times3\times3$-as nagy kockát építünk?

c) Az összerakott $ABCDEFGH$ $3\times3\times3$-as kockát szétvágjuk a $BCQP$ síkkal (P az EF él, Q a HG él ábra *szerinti harmadoló pontja), majd az egész építményt lebontjuk. Az így kapott testek közül azonos valószínűséggel, véletlenszerűen választunk egyet. Mennyi a valószínűsége, hogy egy kis kockát választunk?* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Egy kockát összesen 24-féleképpen helyezhetünk el (pl. bármelyik lapja lehet alul és ezután 4-féle helyzetbe forgathatjuk). Ahhoz, hogy a $2\times2\times2$-es nagy kocka minden lapja piros legyen, minden kis kockának úgy kell állnia, hogy a 3 beszínezett lapja legyen kívül. Ez a 24 esetből 3-szor teljesül (a kis kockáknak a 3 piros lap találkozásánál levő csúcsa meghatározott és ezután 3-féle helyzetbe forgathatjuk). Tehát annak esélye, hogy egy kis kocka jó helyzetben áll:

$$\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$$

a teljes kocka esetén a valószínűség

$$\left(\frac{1}{8}\right)^8\approx 5{,}96\cdot10^{-8}.$$

b) Az *a*) részhez hasonlóan a nagy kocka 8 csúcsában levő kis kocka $\frac{1}{8}$ valószínűséggel áll jó helyzetben. Azok a kis kockák, amelyek a nagy kocka lapjainak közepénél vannak, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel állnak jó helyzetben (6 ilyen kis kocka van), a nagy kocka éleinek közepén levő kis kockák (ilyenből 12 van) pedig $\frac{1}{4}$ valószínűséggel (a 24 esetből 6-ban). A nagy kocka közepén álló kis kocka nyilván tetszőleges helyzetben lehet, vele nem kell foglalkozni. A keresett valószínűség tehát

$$\left(\frac{1}{8}\right)^8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{12}\approx 5{,}55\cdot10^{-17}.$$

c) A $BCQP$ sík összesen 12 kis kockát szel ketté (a felső szinten 3-at, a középsőn 6-ot, az alsón 3-at). Ezért a lebontás után marad $25-12=13$ kis kocka és még $2\cdot12=24$ nem kocka alakú test. Annak valószínűsége tehát, hogy kis kockát választunk:

$$\frac{13}{37}\approx 0{,}351.$$

8. *Az $f\colon\ ]-14;5]\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|+|x+2|-|x-3|$ függvény grafikonjának mely pontja van a legközelebb, illetve a legtávolabb a $P(-4;7)$ ponthoz?* (*16 pont*)

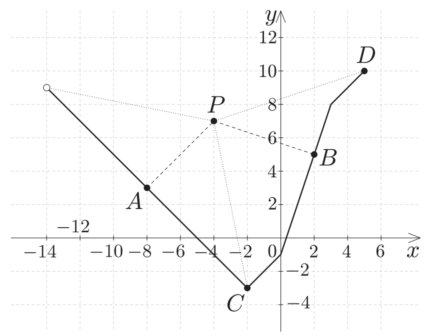
Megoldás. A függvényt célszerű ábrázolni, bontsuk lineáris függvényekre:

a) $$f(x) = -x - 5, \text{ ha } -14 < x < -2.$$

b) $$f(x) = x - 1, \text{ ha } -2 \le x < 0.$$

c) $$f(x) = 3x - 1, \text{ ha } 0 \le x < 3.$$

d) $$f(x) = x + 5, \text{ ha } 3 \le x \le 25.$$



A P-hez legközelebbi pontot megkaphatjuk, ha merőlegeseket bocsátunk a grafikon egyes darabjaira. A PA távolság $\sqrt{32}$, a PB távolság $\sqrt{40}$, tehát a P ponthoz legközelebb az $A(-8; 3)$ pont van.

A P-től legtávolabbi pont meghatározásához számoljuk ki a töröttvonal két végpontjának, illetve az *ábrán* C-vel jelölt pontnak P-től való távolságát. A $C(-2; -3)$ és a $(-14; 9)$ pont P-től egyaránt $\sqrt{104}$ távolságra van, de a $(-14; 9)$ pont nem tartozik a függvény grafikonjához. Az $(5; 10)$ pont $\sqrt{90}$ távolságra van P-től, azaz a legtávolabbi pont: $C(-2; -3)$.

9. *Két szomszédos természetes szám, Nagyobb* (**N**) *és Kisebb* (**K**) *beszélgetnek:*
K: *Nekem* 6 *osztóm van.*
N: *Nekem több.*
K: *A számjegyeim összege* 11.
N: *Nekem kevesebb.*
K: *Pontosan két egyforma számjegyem van.*
N: *Nekem is!*
Melyik ez a két szám? (*16 pont*)

Megoldás. Az, hogy a nagyobb számban kisebb a számjegyek összege, csak úgy lehet, hogy a kisebb szám 9-re végződik (egyébként a nagyobb számban 1-gyel nagyobb lenne a számjegyek összege). Ekkor a nagyobb számban a számjegyek összege csak $11-9+1 = 3$ lehet, hiszen az egyesek helyén 9 helyett 0 fog állni, a tízesek helyén álló számjegy pedig 1-gyel nő. (Még csökkenhetne a számjegyek összege többel is, ha a kisebb szám 1-nél több 9-esre végződne, de esetünkben ez nem lehet, mert a számjegyeik összege 11.)

A nagyobb szám tehát 0-ra végződik és 3 a számjegyeinek összege. Mivel a számnak pontosan 2 azonos számjegye van, ez csak úgy lehet, hogy van még egy darab 0, egy darab 1-es és egy 2-es számjegye. Két 0-ra a fentiek miatt nem végződhet a szám, ezért csak két lehetőség van: 1020 és 2010. A kisebb szám rendre 1019 és 2009 lenne. $2009 = 7^2 \cdot 41$, tehát valóban 6 osztója van (és 2010-nek valóban ennél több), viszont 1019 prímszám, tehát nincs 6 osztója.

Azaz a keresett két szám 2009 és 2010.