I. rész

1. *a*) Igazoljuk, hogy $\sqrt[4]{8}$, $\sqrt[4]{18}$ és $\sqrt[4]{50}$ lehet egy derékszögű háromszög három oldalhosszának mérőszáma.
b) Igazoljuk, hogy

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \qquad \text{és} \qquad \frac{2\sqrt{3}-3}{2\sqrt{6-3\sqrt{3}}}$$

egyenlő. (*10 pont*)

2. *a*) Oldjuk meg az egész számok halmazán: $(5x+60)^2=(-x-192)^2$.
b) Oldjuk meg a valós számok halmazán: $\sqrt{5x+60}=\sqrt{-x-192}$.
c) Oldjuk meg a

$$\sin(5\alpha+60^\circ)=\sin(-\alpha-192^\circ)$$

egyenletet, ha $\alpha\in[-180^\circ;180^\circ]$. (*13 pont*)

3. Egy 32 fős osztályban a lányok testmagasságátlaga 165 cm, a fiúké 172 cm.
a) Adjuk meg azt a legszűkebb intervallumot, ahová az osztály testmagasságának átlaga eshet.
b) Évközben érkezett az osztályba egy 170 cm magas lány. A lányok testmagasságátlaga továbbra is egész szám maradt. Hány lány lehetett eredetileg az osztályban? (*14 pont*)

4. Egy téglalap alapú egyenes hasáb alapéleinek hossza 3 és 5, testátlója pedig $\frac{\sqrt{497}}{2}$.
a) Mekkora szöget zár be a testátló a rövidebb alapéllel?
b) Mekkora a test felszíne?
c) A feladatban szereplő hasábbal egyenlő magasságú, egyenlő térfogatú négyzetes oszlopot szeretnénk tervezni. Hány százalékkal kell változtatni az alapélek hosszát? (*14 pont*)

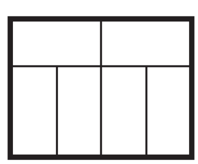
II. rész

5. Az $f(x)=x^3$ a nemnegatív valós és a $g(x)=mx-2m+8$ a valós számok halmazán értelmezett függvények (m valós paraméter). A függvények grafikonjai és az x tengely által meghatározott síkidom területe 2010. Határozzuk meg az m paraméter értékét. (*16 pont*)

6. Egy 5 cm-szer 12 cm-es téglalap alakú papírlap egyik csúcsából a rövidebb oldalon felmérünk 3 cm-t, a hosszú oldalon pedig 4 cm-t. Az így kapott két pontra illeszkedő egyenes mentén a papírlap ezen csúcsát szeretnénk ráhajtani a csúccsal szemközti átlóra. Sikerülhet ez? Hová kerül a csúcs? (*16 pont*)

7. Adott az AB_1C_1, AB_2C_2, …, AB_nC_n, … egyenlőszárú háromszögek sorozata (n pozitív egész szám). Minden n esetén a háromszög AB_n alapja az x tengely pozitív felére esik olyan módon, hogy az A csúcs az origóban van, az alap hossza pedig $2n$. Tudjuk továbbá, hogy a harmadik csúcs illeszkedik az $f(x)=x^2+5$ függvény grafikonjára.
a) Számítsuk ki az AB_1C_1 háromszög kerületét és területét.
b) Melyik háromszögtől kezdve lesz a háromszögek kerülete nagyobb, mint 190?
c) Igazoljuk, hogy mindegyik háromszög területének mérőszáma osztható hattal. (*16 pont*)

8. Egy iskola ablakainak formáját láthatjuk a mellékelt *ábrán.*



Az egyik osztályban elhatározták, hogy az ablakok téglalap alakú üveglapjainak közepére legfeljebb egy üvegmatricát ragasztanak.
a) Hányféleképpen lehet elhelyezni a matricákat egy ablakra, ha a hat üvegtáblára négyet terveznek, és a matricák egyformák?
b) Hányféleképpen lehet elhelyezni a matricákat egy ablakra, ha a hat üvegtáblára hármat terveznek, és a matricák különbözők?
c) Hányféleképpen lehet elhelyezni a matricákat, ha a díszítéshez tengelyesen szimmetrikusan választják ki az üveglapokat, amelyekre egyforma matricákat ragasztanak?

d) Az ablak mind a hat része külön-külön nyitható. Kiválasztanak kettőt véletlenszerűen (egyforma valószínűséggel), amelyeket szellőztetés miatt kinyitnak. Mekkora az esélye, hogy egy hárommatricás ablak esetén, két nem díszített részt fognak kinyitni? (*16 pont*)

9. A Fő tér szabályos háromszög alakú vízszintes részét díszburkolattal fedték le. A háromszög közepén áll egy magas zászlórúd. A háromszög csúcsaiban egy-egy kb. 180 cm magas ember tartózkodik. Ketten elindulnak a zászlórúd felé. Az egyik akkor áll meg, amikor a rúd tetejét 72°-os szögben látja. A másik sétáló akkor áll meg, amikor a rúd tetejét 65°-os szögben látja. A helyben maradó társuk 50°-os szögben látja a zászlórúd tetejét. Ekkor a három ember által meghatározott háromszög területe 23,74 m^2.

a) Milyen magas a zászlórúd?

b) Mekkora a díszburkolattal lefedett rész területe? (*16 pont*)