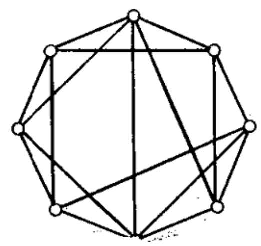
Ha a társaságnak van olyan tagja, aki legalább 4 másikat nem ismer, akkor ez utóbbiak közül bármely kettőnek ismernie kell egymást, azaz máris találtunk négy megfelelő embert. Így feltehetjük, hogy mindenkinek legalább 5 ismerőse van a szobában. De nem lehet mindenkinek pontosan 5 ismerőse, mert az $5 \cdot 9/2$ ismeretséget jelentene, ami pedig nem egész. Kell tehát lennie legalább 6 ismerőssel rendelkező embernek is, legyen A ilyen, A ismerősei közül pedig egyik legyen B.

Ha B az A ismerősei közül legalább hármat ismer, akkor ezek közül valamelyik kettő A-val és B-vel együtt megfelelő négyest alkot. Ha nem, akkor B az A ismerősei közül legalább hármat nem ismer, ez a három és A lesz a jó négyes.

Így tehát minden esetben találtunk olyan négyest, akik kölcsönösen ismerik egymást.

Megjegyzések. 1. Ez a feladat emlékeztet az F. 2187. feladatra, mindkettő a gráfelmélet egy-egy picike tételét tárgyalja.

2. Teljes indukcióval könnyen be lehet bizonyítani a következő tételt. Ha egy szobában $n(n+1)/2$ ember van és bármely három között van kettő, akik ismerik egymást, akkor van a szobában n ember, akik közül bármely kettő ismeri egymást. Jelöljük $f(n)$-nel azt a legkisebb egészt, amit $n(n+1)/2$ helyébe téve még mindig igaz marad az állítás. Könnyű ellenőrizni hogy $f(2)=3$, $f(3)=6$ és $f(4)=9$. A feladatban $f(4) \leq 9$-et bizonyítottuk, míg $f(4)>8$-at a mellékelt ábra mutatja.



Az $f(n)$ függvényről tudjuk, hogy vannak olyan c_1 és c_2 konstansok, melyekre

$$c_1 \cdot \frac{n^2}{(\lg n)^2} < f(n) < c_2 \cdot \frac{n^2}{\lg n}$$

teljesül minden n-re. A bal oldali egyenlőtlenséget *Erdős Pál,* a jobb oldalit *Szemerédi Endre* bizonyította.