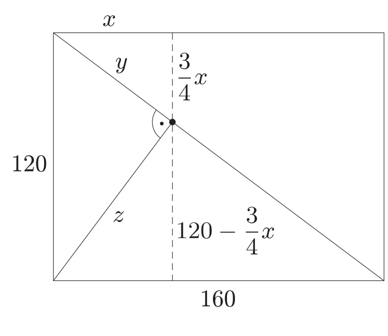
I. rész

1. *Egy téglalap alakú halastó oldalai* 120 m *és* 160 m *hosszúságúak. A téglalap egyik átlója mentén ott vernek le egy cölöpöt, ahonnan a kisebbik oldal két vége derékszög alatt látszik. Milyen messze van a cölöp a halastó oldalaitól?* (*11 pont*)

Megoldás. Legyen a cölöp távolsága a rövidebb oldaltól x. Ekkor a cölöp távolsága a hosszabb oldaltól $\frac{3}{4}x$.
A rövidebb oldal két végpontjától vett távolságot jelölje y és z.



Alkalmazhatjuk a Pitagorasz-tételt három derékszögű háromszögre:

$$y^2+z^2=120^2, \quad y^2=x^2+\left(\frac{3}{4}x\right)^2$$

és

$$z^2=x^2+\left(120-\frac{3}{4}x\right)^2.$$

A két utóbbi egyenletből y^2 és z^2 értékét behelyettesítjük az első egyenletbe:

$$\frac{25}{8}x^2-180x=0.$$

Ennek megoldásai a 0 és az 57,6. A feladat szövege alapján x nem lehet 0.
Vagyis a cölöp 57,6 és 62,4 méterre van a halastó rövidebb oldalaitól és 43,2, illetve 116,8 méterre a hosszabb oldalaktól.

2. *Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:*
a) $\sqrt{x^2-5x+4}>-1$;
b) $\log_{\frac{1}{2}}(4^x-5\cdot 2^x+8)<-2$. (*12 pont*)

Megoldás. *a*) A gyökös kifejezés nem lehet negatív, így az egyenlőtlenség a teljes értelmezési tartományon teljesül, azaz akkor, ha $x^2-5x+4\geq 0$.
Vagyis a megoldás: $x\geq 4$ vagy $x\leq 1$.
b) Az $\frac{1}{2}$ alapú logaritmus függvény szigorúan monoton csökkenő, ezért

$$4^x-5\cdot 2^x+8>4$$

(ilyenkor $4^x-5\cdot 2^x+8>0$ is teljesül, a logaritmus értelmezett).
A $2^{2x}-5\cdot 2^x+4>0$ egy másodfokú egyenlőtlenség 2^x-re nézve. Innen $2^x>4$, azaz $x>2$ vagy $2^x<1$, azaz $x<0$.
Vagyis a megoldás: $x>2$ vagy $x<0$.

3. *Két iskola sakkozói versenyeztek egymással. Mindenki mindenkivel egyszer játszott. Először egy-egy iskolán belül bonyolították le a mérkőzéseket, és így összesen* 36 *játszmára került sor. Amikor a két iskola tanulói mérkőztek egymással, akkor* 42 *játékra került sor. Hány tanuló vett részt a versenyen iskolánként?* (*14 pont*)

Megoldás. Legyen az iskolák versenyzőinek száma x és y. Ekkor

$$\frac{x(x-1)}{2}+\frac{y(y-1)}{2}=36$$

az iskolákon belüli, és $xy=42$ a két iskola tanulói közötti mérkőzések száma. Mivel a megoldásokat a pozitív egész számok körében keressük, így csak az 1–42, 2–21, 3–14, 6–7 számpárok jöhetnek szóba. Az első egyenletet átalakítva

$x^2 + y^2 - (x + y) = 72$ alakba behelyettesítve látható, hogy csak az $x = 6$, $y = 7$ (vagy a fordított) számpár ad megoldást.

Az egyik iskolából tehát 6, a másikból 7 tanuló vett részt a versenyen.

4. *Antal* 2005 *elején* 100 000 Ft*-ot helyezett el egy bankban évi* 20%*-os kamatra. Béla* 2005*-től kezdve minden év elején b forintot helyezett el szintén évi* 20%*-os kamatra. A* 2009*. év végén Antal és Béla betétje azonos értékre növekedett (*2005*-től* 2009*-ig egyikük sem vett ki a betétjéből pénzt). Mennyi b értéke* 1000 Ft*-ra kerekítve?* (*14 pont*)

Megoldás. Antal pénze minden év végén 20%-kal nőtt, tehát 1,2-szeresére változott. Az 5 év alatt $100\,000 \cdot 1{,}2^5 = 248\,832$ Ft-ra nőtt.

A Béla által minden év elején betett b forintok 5, 4, 3, 2, 1 évig kamatoznak, így az ő pénze:

$$b \cdot 1{,}2^5 + b \cdot 1{,}2^4 + b \cdot 1{,}2^3 + b \cdot 1{,}2^2 + b \cdot 1{,}2 =$$
$$= b \cdot (1{,}2^5 + 1{,}2^4 + 1{,}2^3 + 1{,}2^2 + 1{,}2) = b \cdot 8{,}929\,92 \text{ Ft-ra nőtt.}$$

Mivel a két betét azonos értékű, így $248\,832 = b \cdot 8{,}929\,92$, vagyis $b \approx 28\,000$ Ft.

II. rész

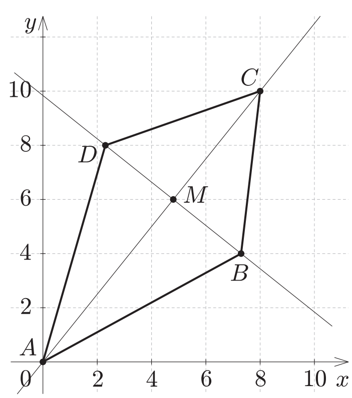
5. *Az $ABCD$ deltoid szimmetriatengelye az AC átló, ahol $A(0;0)$ és $C(8;10)$. A deltoid területe* 41 *területegység. Az egyik átló az origótól számítva* 3 : 2 *arányban osztja a másikat. Határozzuk meg a hiányzó csúcspontok koordinátáit.* (*16 pont*)

Megoldás. Az AC átló hossza:

$$\sqrt{8^2 + 10^2} = \sqrt{164}.$$

$T = \dfrac{AC \cdot BD}{2}$ miatt

$$BD = \frac{82}{\sqrt{164}} = \sqrt{41}.$$



Az AC és BD átló M metszéspontja az AC átlót 3 : 2 arányban osztja, ezért $M\left(\dfrac{24}{5};6\right)$. Az M pontban állítsunk merőlegest az AC átlóra:

$$4x + 5y = \frac{246}{5}.$$

Az M pont körül $MD = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{\sqrt{41}}{2}$ távolsággal rajzolt kör egyenlete:

$$\left(x - \frac{24}{5}\right)^2 + (y - 6)^2 = \frac{41}{4}.$$

A két alakzat metszéspontjai lesznek a B és a D csúcsok.

A hiányzó két csúcs tehát: $B(7{,}3;4)$, $D(2{,}3;8)$.

6. *Forgassunk meg egy egyenlő szárú háromszöget egyik szára, majd az alapja körül. Jelölje V_1, illetve V_2 az így keletkezett forgástestek térfogatát. Számítsuk ki a háromszög szögeit, ha $V_1 : V_2 = 3 : 7$.* (*16 pont*)

Megoldás. Ha az ABC háromszöget az AC szára körül forgatjuk meg, akkor a keletkezett forgástest térfogata:

$$V_1 = \frac{m_b^2\pi \cdot b}{3}.$$

Ha a BC alap körül forgatjuk: $V_2 = \dfrac{m_a^2\pi \cdot a}{3}$. A feladat feltételei alapján:

$$\frac{3}{7} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{m_b^2 b}{m_a^2 a}.$$

A háromszög területét kétféle módon számolva tudjuk, hogy $2T = am_a = bm_b$, vagyis

$$\frac{3}{7} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{m_b^2 b}{m_a^2 a} = \frac{m_b^2 b^2 a}{m_a^2 a^2 b} = \frac{a}{b}.$$

Ugyanakkor az alapon fekvő β szögre

$$\cos\beta = \frac{a}{2b} = \frac{3}{14}, \quad \text{tehát} \quad \beta \approx 77{,}6^\circ.$$

A háromszög szögei tehát: $77{,}6^\circ$, $77{,}6^\circ$ és $24{,}8^\circ$.

7. *a) Adjuk meg azokat az a; b; c számjegyeket, melyekre fennáll, hogy az egyjegyű $\overline{a}$, a kétjegyű $\overline{ba}$ és a háromjegyű $\overline{cba}$ pozitív számok egy mértani sorozat egymást követő elemei.*

b) Adjuk meg azokat az a; b; c számjegyeket, melyekre fennáll, hogy az egyjegyű $\overline{a}$, a kétjegyű $\overline{ba}$ kétszerese és a háromjegyű $\overline{cba}$ pozitív számok egy számtani sorozat egymást követő elemei. (*16 pont*)

Megoldás. *a)* A mértani sorozat egymást követő elemeire:

$$(10b + a)^2 = a(100c + 10b + a).$$

Így $ab = 10(ac - b^2)$ miatt $10 \mid ab$. Tehát két eset lehet: $a = 5$ és $b = 2; 4; 6; 8$, illetve $b = 5$ és $a = 2; 4; 6; 8$. Csak az elsőnél adódik megoldás: $a = 5$, $b = 2$, $c = 1$.

Valóban az 5, 25, 125 egy mértani sorozat egymást követő elemei.

b) A számtani sorozat egymást követő elemeire:

$$\frac{a + (100c + 10b + a)}{2} = 2(10b + a), \quad \text{amiből} \quad 50c = 15b + a.$$

A bal oldal osztható öttel, ezért a is osztható öttel és pozitív. Vagyis $a = 5$. Ekkor $10c = 3b + 1$. A jobb oldal értéke 30-nál kisebb, ezért c lehetséges értékei: 1 vagy 2. Ha $c = 1$, akkor $b = 3$. Ha $c = 2$, akkor nincs megfelelő b. A megoldás: $a = 5$, $b = 3$, $c = 1$.

Valóban az 5, $2 \cdot 35$, 135 egy számtani sorozat egymást követő elemei.

8. *Egy lövész $\frac{1}{4}$ valószínűséggel találja el a célpontot.*

a) Mi a valószínűsége annak, hogy 7 lövés közül legalább 2-szer célba talál?

b) Legalább hány lövést kell leadnia ahhoz, hogy a célt $\frac{2}{3}$-nál nagyobb valószínűséggel találja el? (*16 pont*)

Megoldás. *a)*

$$p(\text{legalább } 2) = 1 - p(0 \text{ találat}) - p(1 \text{ találat}) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^7 - \binom{7}{1}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^6 \approx 0{,}555.$$

b) $\dfrac{3}{4}$ a valószínűsége annak, hogy nem talál célba és $\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$, hogy még n lövésből sem talál célba. Az a kérdés, hogy ez mikor lesz $\dfrac{1}{3}$-nál kisebb: $\left(\dfrac{3}{4}\right)^n < \dfrac{1}{3}$. Ebből:

$$n \lg\left(\frac{3}{4}\right) < \lg\left(\frac{1}{3}\right), \quad \text{azaz} \quad n > \frac{\lg \frac{1}{3}}{\lg \frac{3}{4}} \approx 3{,}82.$$

Tehát, ha a lövész legalább 4 lövést ad le, akkor $\dfrac{2}{3}$-nál nagyobb valószínűséggel talál célba.

9. *Adjuk meg az*

$$f(x) = 3^{1+\log_3\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]}$$

hozzárendeléssel megadott függvény grafikonját a $\left]-\frac{3\pi}{4};\frac{9\pi}{4}\right]$*-on. Adjuk meg az* $f(x)$ *függvény értelmezési tartományát, értékkészletét, zérushelyeit, a függvény menetét, periódusát.* *(16 pont)*

Megoldás. *a*) Mivel csak pozitív számnak van logaritmusa, azért

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>0, \quad \text{vagyis} \quad -\frac{\pi}{2}+2k\pi<x+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+2k\pi.$$

Tehát a függvény értelmezési tartománya:

$$D_f=\left\{x\in R \,\middle|\, -\frac{3\pi}{4}+2k\pi<x<\frac{\pi}{4}+2k\pi, \text{ ahol } k\in Z\right\}.$$

Ezen feltételek mellett $f(x)=3\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ alakra hozható a függvény hozzárendelési szabálya.

A függvény értékkészlete: $R_f=\,]0;3]$, zérushelye nincs, minimuma nincs, maximuma 3, maximumhelyei $x=-\frac{\pi}{4}+2l\pi$, $l\in\mathbb{Z}$, periódusa 2π.

Szigorúan monoton nő a $\left]-\frac{3\pi}{4}+2n\pi;-\frac{\pi}{4}+2n\pi\right]$-on, szigorúan monoton csökken a $\left[-\frac{\pi}{4}+2m\pi;\frac{\pi}{4}+2m\pi\right[$-on, ahol $n,m\in\mathbb{Z}$.

A függvény grafikonja a $\left]-\frac{3\pi}{4};\frac{9\pi}{4}\right]$-on: