

I. rész

1. Oldjuk meg a következő egyenletet az egész számok halmazán:

$$|45x - 8| + 7 \cdot 2^{x+4} + \log_2^2(x - 2) + \sqrt{4x + 2009} = 2010.$$

(11 pont)

2. Egy háromszög egyik oldala $a = 10$, a rajta fekvő két szög $\beta = 50^\circ$ és $\gamma = 60^\circ$. Számítsuk ki annak a forgástestnek a térfogatát, amelyet úgy kapunk, hogy a háromszöget megforgatjuk a leghosszabb oldala körül. (12 pont)

3. a) Határozzuk meg az alábbi halmazok elemeit.

$$A = \{ \log_3(x - 6) < 2 \text{ egyenlőtlenség egész gyökei} \};$$

$$B = \{ 20\text{-nál kisebb pozitív egészek, melyeknek legalább 4 db osztójuk van} \};$$

$C = \{ A \text{ számjegyek összegének lehetséges értékei az olyan háromjegyű számokban, amelyeknek a számjegyei számtani sorozatot alkotnak} \}.$

b) Adjuk meg a $(C \setminus A) \cup (A \cap B)$ halmaz elemeit. (14 pont)

4. A $[-2; 2]$ mely x elemeire igaz, hogy $\sin x$, $2 \operatorname{tg} 2x$ és $3 \cos x$ egy mértani sorozat szomszédos elemei ebben a sorrendben? (14 pont)

II. rész

5. Az A pont illeszkedik az

$$e: 2x - y + 4 = 0,$$

a B pont pedig az

$$f: 2x + 3y - 8 = 0$$

egyenletű egyenesre. Határozzuk meg az A és B pontok koordinátáit, ha az AB szakasz felezőpontja $F(5; 4)$. (16 pont)

6. a) Határozzuk meg a P és Q pontok koordinátáit, ha P az

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$$

függvény inflexiós pontja, Q első koordinátája f lokális maximumhelye, második koordinátája pedig a lokális maximum értéke.

b) Írjuk fel a g másodfokú függvény hozzárendelési szabályát, ha g képének tengelypontja a P pont és a grafikon áthalad a Q ponton is.

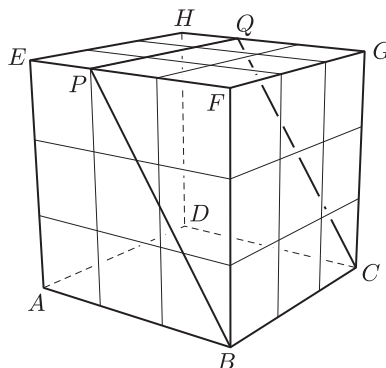
c) Számítsuk ki a két függvény grafikonja által közrefogott P és Q csúcsokkal rendelkező síkidom területét. (16 pont)

7. Néhány egybevágó, egység élű kocka 3-3 lapját befestjük pirosra, mindegyik kockát egyformán, úgy, hogy egy közös csúcsban találkozó három lap legyen színes. 8 ilyen kockából egy $2 \times 2 \times 2$ -es nagyobb kockát építünk úgy, hogy a kis kockákat véletlenszerűen helyezzük egymásra.

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a nagy kocka minden lapja (teljesen) piros?

b) Mekkora lenne ez a valószínűség, ha 27 kis kockából $3 \times 3 \times 3$ -as nagy kockát építünk?

c) Az összerakott $ABCDEFGH$ $3 \times 3 \times 3$ -as kockát szétvágjuk a $BCQP$ síkkal (P az EF él, Q a HG él *ábra* szerinti harmadoló pontja), majd az egész építményt lebontjuk. Az így kapott testek közül azonos valószínűséggel, véletlenszerűen választunk egyet. Mennyi a valószínűsége, hogy egy kis kockát választunk? (16 pont)



8. Az $f:]-14; 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x| + |x + 2| - |x - 3|$ függvény grafikonjának mely pontja van a legközelebb, illetve a legtávolabb a $P(-4; 7)$ ponthoz? (16 pont)

9. Két szomszédos természetes szám, Nagyobb (**N**) és Kisebb (**K**) beszélgetnek:

K: Nekem 6 osztóm van.

N: Nekem több.

K: A számjegyeim összege 11.

N: Nekem kevesebb.

K: Pontosan két egyforma számjegyem van.

N: Nekem is!

Melyik ez a két szám?

(16 pont)