

Elméleti feladatok

1. feladat. A Föld–Hold rendszer fejlődése

1. Impulzusmomentum-megmaradás

1a–1c. A Föld–Hold rendszer teljes impulzusmomentuma a Föld forgásából és a Hold keringéséből származó két tag összege. A feladat jelöléseit használva kezdetben az impulzusmomentum $L_1 = I_F\omega_{F1} + I_{H1}\omega_{H1}$, a folyamat végén pedig, amikor a Föld forgásának és a Hold keringésének szögsebessége megegyezik, $L_2 = I_F\omega_2 + I_{H2}\omega_2$. Az impulzusmomentum-megmaradás tétel értelmében $L_1 = L_2$, és L_2 -ben a Föld impulzusmomentumát elhanyagolva azt kapjuk, hogy

$$(1) \quad L_1 = I_F\omega_{F1} + I_{H1}\omega_{H1} = I_{H2}\omega_2.$$

(Emlékeztetőül, az impulzusmomentumot L , a tehetetlenségi nyomatékot I , a szögsebességet ω jelöli. Az 1 index a kezdeti állapotra, 2 a végső állapotra, F a Földre, H pedig a Holdra utal.)

2. Végső pályasugár és szögsebesség a Föld–Hold rendszerben

2a–2c. Feltételezve, hogy a Hold a végső helyzetben is körpályán kering a Föld körül, mozgásegyenletére (rendezés után) az adódik, hogy $\omega_2^2 D_2^3 = GM_F$, ahol D_2 a végső pályasugár, G a gravitációs állandó, M_F pedig a Föld tömege. Felhasználva az L_1 -re kapott (1) összefüggést, valamint hogy $I_{H2} = M_H D_2^2$, a végső pályasugarat és szögsebességet könnyen kifejezhetjük a kért mennyiségekkel:

$$(2) \quad D_2 = \frac{L_1^2}{GM_F M_H^2}, \quad \omega_2 = \frac{G^2 M_F^2 M_H^3}{L_1^3}.$$

2d–2e. Közismert, hogy az R sugarú, M tömegű homogén gömb tehetetlenségi nyomatéka $\frac{2}{5}MR^2$. Ennek felhasználásával, a feladatban leírt modell alapján a Föld tehetetlenségi nyomatéka

$$I_F = \frac{2}{5} \frac{4\pi}{3} (r_1^5 \rho_1 + (r_0^5 - r_1^5) \rho_0) = 8,0 \cdot 10^{37} \text{ kg m}^2.$$

(Az első tag az r_1 sugarú, ρ_1 sűrűségű belső mag járuléka, míg a második tag az r_0 külső sugarú, ρ_0 sűrűségű külső köpeny járuléka.)

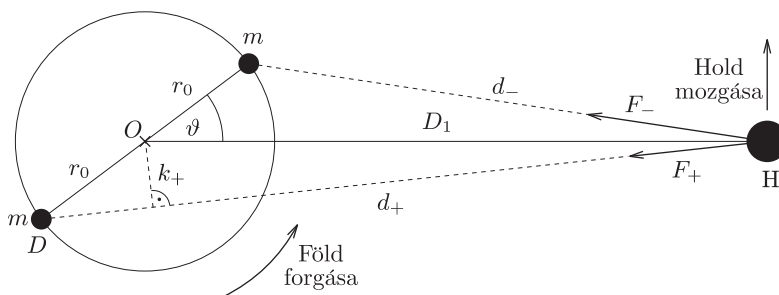
2f–2h. A feladatban megadott adatokat a már felírt (1)–(2) formulákba behelyettesítve a keresett számértékek könnyen meghatározhatók:

$$\begin{aligned} L_1 &= 3,4 \cdot 10^{34} \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}, \\ D_2 &= 5,4 \cdot 10^8 \text{ m}, & \text{tehát } D_2 &= 1,4D_1, \\ \omega_2 &= 1,6 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{s}}, & \text{így a periódusidő} &= 46 \text{ nap.} \end{aligned}$$

2i. A végső helyzetben a Föld impulzusmomentuma $I_F\omega_2 = 1,3 \cdot 10^{32} \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$, míg a Holdé $I_{H2}\omega_2 = 3,4 \cdot 10^{34} \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$, ami közel 260-szorosa a Földének, tehát a számolás elején tett elhanyagolás valóban jogos volt.

3. Mennyivel távolodik a Hold évenként?

A Földön levő vízréteg szabad felszíne állandó gravitációs potenciálú felületen helyezkedik el. Ha csak a Föld gravitációs terét vennénk figyelembe, akkor az ekvipotenciális felületek koncentrikus gömbök lennének. A Hold gravitációs hatására e gömbök deformálódnak; a Föld Hold felé eső, és azzal átellenesen elhelyezkedő pontjukban „kitüremkedések” jönnek létre. (Ezeknek a kitüremkedéseknek a forgó Földhöz képesti mozgását érzékeljük árapályként.) A Föld forgása miatt a kitüremkedések kicsiny $\vartheta > 0$ szöggel kifordulnak a Föld–Hold egyenesből. A feladat szerinti modellben a kitüremkedéseket két m tömegű tömegponttal helyettesítjük, melyek a Föld felszínének átellenes pontjaiban helyezkednek el, ahogy az 1. ábrán látható.



1. ábra

Mivel $\vartheta > 0$, a két égitest forgatónyomatékokat fejt ki egymásra, mely a Föld forgását lassítja, a Hold pályamenti impulzusmomentumát pedig növeli.

3a-3f. Az egyszerű modell alapján könnyen kiszámolhatjuk két tömegpont Holdra ható forgatónyomatékát. A koszinusztétel alapján a tömegpontok távolsága a Holdtól

$$d_{\pm} = D_1^2 + r_0^2 \pm 2D_1r_0 \cos \vartheta,$$

tehát a tömegpontok és a Hold közti gravitációs erő

$$F_{\pm} = \frac{GmM_H}{d_{\pm}}.$$

Az *ODH* háromszög területét kétféleképpen fölírva $\frac{1}{2}r_0D_1 \sin \vartheta = \frac{1}{2}k_+d_+$, ahonnan az F_+ erőhöz tartozó erőkar

$$k_+ = \frac{r_0D_1 \sin \vartheta}{d_+}.$$

Hasonló formula kapható a másik erőkarra is, így a két tömegpont által kifejtett forgatónyomaték:

$$\tau_{\pm} = F_{\pm}k_{\pm} = \frac{GmM_Hr_0D_1 \sin \vartheta}{(D_1^2 + r_0^2 \pm 2D_1r_0 \cos \vartheta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Egyszerűsítsünk D_1^3 -el és alkalmazzuk az $(1 + \varepsilon)^a \approx 1 + \varepsilon a$ közelítő formulát, mely $\varepsilon \ll 1$ esetén érvényes, figyelembe véve, hogy esetünkben $\frac{r_0}{D_1} \ll 1$.

$$\begin{aligned} \tau_{\pm} &= \frac{GmM_Hr_0 \sin \vartheta}{D_1^2} \left(1 + \frac{r_0^2}{D_1^2} \pm 2\frac{r_0}{D_1} \cos \vartheta \right)^{-\frac{3}{2}} \approx \\ &\approx \frac{GmM_Hr_0 \sin \vartheta}{D_1^2} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{r_0^2}{D_1^2} \mp 3\frac{r_0}{D_1} \cos \vartheta \right). \end{aligned}$$

A fenti közelítéssel élve a Holdra ható, keringését gyorsító eredő forgatónyomaték:

$$(3) \quad \tau = \tau_- - \tau_+ \approx \frac{6GmM_Hr_0^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{D_1^3} = 4,1 \cdot 10^{16} \text{ Nm.}$$

3g-3h. A Föld körül körpályán keringő Hold mozgásegyenlete

$$\frac{GM_F M_H}{D^2} = M_H D \omega_H^2,$$

ahonnan a Hold szögsebessége $\omega_H = \sqrt{\frac{GM_F}{D^3}}$. Ennek felhasználásával a Hold impulzusmomentuma a keringési sugárral kifejezve:

$$(4) \quad L_H = I_H \omega_H = M_H \sqrt{DGM_F}.$$

Ez az összefüggés fönnáll az impulzusmomentum és a pályasugár jelenlegi L_{H1} és D_1 értéke mellett is, és Δt idővel később is, amikor az impulzusmomentum értéke a τ forgatónyomaték hatására $L_{H1} + \tau \Delta t$ lesz, a Hold pályasugara pedig $D_1 + \Delta D$ -re nő. Mivel

$$\sqrt{D + \Delta D} \approx \sqrt{D} + \frac{\Delta D}{2\sqrt{D}},$$

azért a (4) összefüggésben a két oldal megváltozására azt kapjuk, hogy

$$\Delta L_{1M} = \tau \Delta t = \frac{M_H}{2} \sqrt{\frac{GM_F}{D_1}} \Delta D.$$

Innen ΔD -t kifejezve, és $\Delta t = 1 \text{ év} = 3,1 \cdot 10^7 \text{ s}$ értékkel számolva a Hold jelenlegi éves távolodására azt kapjuk, hogy

$$(5) \quad \Delta D_1 = \frac{2\tau \Delta t}{M_H} \sqrt{\frac{D_1}{GM_F}} = 0,034 \text{ m} = 3,4 \text{ cm.}$$

A (3) formulával megadott τ forgatónyomaték csökkenti a Föld impulzusmomentumát, $\Delta L_F = -\tau \Delta t = I_F \Delta \omega_F$, ahonnan $\Delta t = 1 \text{ év}$ alatt a jelenlegi szögsebesség-változás:

$$(6) \quad \Delta \omega_{F1} = -\frac{\tau \Delta t}{I_F} = -1,6 \cdot 10^{-14} \frac{1}{\text{s}}.$$

Mivel a periódusidő $T_F = \frac{2\pi}{\omega}$, a nap hossza egy év alatt

$$\Delta T_F = 2\pi \left(\frac{1}{\omega + \Delta\omega} - \frac{1}{\omega} \right) \approx -\frac{2\pi}{\omega^2} \Delta\omega = 1,9 \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

értékkel nő.

4. Hová lesz az energia?

4a–4b. Korábban (a 3g. pontban) láttuk, hogy a körpályán keringő Hold szögsebessége

$$\omega_{H1} = \sqrt{\frac{GM_F}{D_1^3}}.$$

Ezt felhasználva a Föld–Hold rendszer mechanikai energiája jelenleg:

$$E = \frac{I_F \omega_{F1}^2}{2} + \frac{I_H \omega_{H1}^2}{2} - \frac{GM_F M_H}{D_1} = \frac{I_F \omega_{F1}^2}{2} - \frac{GM_F M_H}{2D_1}.$$

Figyelembe véve, hogy

$$\Delta(\omega^2) = (\omega + \Delta\omega)^2 - \omega^2 \approx 2\omega\Delta\omega, \quad \text{és} \quad \Delta\left(\frac{1}{D}\right) = \frac{1}{D + \Delta D} - \frac{1}{D} \approx -\frac{\Delta D}{D^2},$$

valamint felhasználva az (5)–(6) eredményeket, az egy év alatt bekövetkező energiaváltozás:

$$(7) \quad \Delta E = I_F \omega_{F1} \Delta\omega_{F1} + \frac{GM_F M_H}{2D_1^2} \Delta D_1 = -9,0 \cdot 10^{19} \text{ J.}$$

4c–4d. A Föld teljes felszínét $h = 0,5$ m vastagon beborító vízréteg tömege:

$$M_{v\acute{i}z} = 4\pi r_0^2 h \rho_{v\acute{i}z} = 2,6 \cdot 10^{17} \text{ kg.}$$

A víz viszkozitása miatt egy év alatt disszipálódott energia:

$$\Delta E_{v\acute{i}z} = -g M_{v\acute{i}z} h \cdot 2 \cdot 365 \cdot 0,1 = -9,3 \cdot 10^{19} \text{ J,}$$

ami jól egyezik a (7) egyenletben kapott energiacsökkenéssel.

2. feladat. Lézeres Doppler-hűtés és optikai szirupok

Ennek a feladatnak a megoldásában kulcsszerepet játszik a relativisztikus, longitudinális Doppler-effektus. Ha az ω körfrekvenciájú fényt kibocsátó fényforrás a megfigyelőhöz képest v relatív sebességgel mozog, akkor a megfigyelő által észlelt ω' körfrekvencia

$$(8) \quad \omega' = \omega \sqrt{\frac{1 \pm \frac{v}{c}}{1 \mp \frac{v}{c}}} \approx \omega \left(1 \pm \frac{v}{c} \right),$$

ahol c a fénysebesség, és a második, közelítő egyenlőség akkor igaz, ha $\frac{v}{c} \ll 1$. A felső előjelezés akkor érvényes, ha a fényforrás és a megfigyelő közelednek egymáshoz, az alsó pedig akkor, ha távolodnak. (A közelítés az $\varepsilon \ll 1$ esetén érvényes $(1 + \varepsilon)^a \approx 1 + a\varepsilon$ formula többszöri alkalmazásával kapható meg.)

Jelölje ω_L a lézer laboratóriumban mért körfrekvenciáját, legyen $\hbar\omega_0$ az atom két állapota közti energiakülönbség. Ekkor a $-x$ tengely irányába haladó foton energiája $\hbar\omega_L$, impulzusa $-\frac{\hbar\omega_L}{c} = -\hbar q$, ahol q a hullámszám.

A feladatmegoldás során végig feltételezzük, hogy $\frac{v}{c} \ll 1$, valamint

$$\frac{\hbar q}{mv} = \frac{\hbar\omega_L}{mvc} \ll 1,$$

és ezen kis mennyiségekben első rendig számolunk.

I. rész: A lézeres hűtés alapjai

1. Elnyelés (abszorpció)

A (8) egyenlet alapján a fényforráshoz v sebességgel közeledő atom által észlelt frekvencia $\omega_L \left(1 + \frac{v}{c}\right)$, tehát a rezonanciafeltétel $\omega_0 = \omega_L \left(1 + \frac{v}{c}\right)$. A foton elnyelése után az atom impulzusa a foton impulzusával csökken, így $p_a = mv - \frac{\hbar\omega_L}{c}$. Az atom teljes energiája a mozgási energiájának és a gerjesztési energiának az összege, azaz

$$\varepsilon_a = \frac{p_a^2}{2m} + \hbar\omega_0 \approx \frac{mv^2}{2} + \hbar\omega_L.$$

2. Egy foton spontán kibocsátása (emissziója) a $-x$ irányban

A $v' = v - \frac{\hbar\omega_L}{vc}$ sebességgel mozgó atom saját rendszerében ω_0 frekvenciájú fotont bocsát ki, ami azt jelenti, hogy a labor rendszeréből a foton frekvenciája

$$(9) \quad \omega_0 \left(1 - \frac{v'}{c}\right) = \omega_0 \left(1 - \frac{v}{c} + \frac{\hbar\omega_L v}{mvc}\right) \approx \omega_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right) \approx \omega_L.$$

Innen a foton energiája és impulzusa egyszerűen kiszámolható:

$$(10a) \quad p_f^- \approx -\frac{\hbar\omega_L}{c}, \quad \varepsilon_f^- \approx \hbar\omega_L.$$

A foton kibocsátása után az atom impulzusa ezzel az értékkel nő, így

$$(10b) \quad p_a^- \approx mv, \quad \varepsilon_a^- = \frac{(p_a^-)^2}{2m} \approx \frac{mv^2}{2}.$$

Végeredményben az abszorpció-emissziós folyamat után a két részecske állapota olyan, mintha a foton nem is lépett volna kölcsönhatásba az atommal.

3. Egy foton spontán kibocsátása (emissziója) a $+x$ irányban

Ha az atom $+x$ irányban bocsátja ki a fotont, akkor labor rendszerében nagyobbak észleljük a foton frekvenciáját. Az előző (9) levezetéshez hasonlóan kell számolnunk, azonban v' előjele módosul:

$$\omega_0 \left(1 + \frac{v'}{c}\right) \approx \omega_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right) \approx \omega_L \left(1 + \frac{2v}{c}\right).$$

Ezután már könnyen megkapjuk a foton, illetve az atom energiáját és impulzusát:

$$(11a) \quad p_f^+ \approx \frac{\hbar\omega_L}{c} \left(1 + \frac{2v}{c}\right), \quad \varepsilon_f^+ \approx \hbar\omega_L \left(1 + \frac{2v}{c}\right),$$

$$(11b) \quad p_a^+ \approx mv - \frac{2\hbar\omega_L}{c}, \quad \varepsilon_a^+ \approx \frac{mv^2}{2} \left(1 - \frac{4\hbar\omega_L}{mvc}\right).$$

4. Átlagos kibocsátás (emisszió) az elnyelés (abszorpció) után

Mint hogy a spontán emisszió egyforma valószínűséggel mehet végbe $+x$ és $-x$ irányban, a keresett átlagértékek a (10) és (11) mennyiségek számtani közepéiként kaphatók meg:

$$(12a) \quad \bar{p}_f \approx \frac{\hbar\omega_L v}{c^2} \approx 0, \quad \bar{\varepsilon}_f \approx \hbar\omega_L \left(1 + \frac{v}{c}\right),$$

$$(12b) \quad \bar{p}_a \approx mv - \frac{\hbar\omega_L}{c}, \quad \bar{\varepsilon}_a \approx \frac{mv^2}{2} \left(1 - \frac{2\hbar\omega_L}{mvc}\right).$$

5. Energia- és impulzusátadás

A $-x$ irányban haladó foton által az atomnak átlagosan átadott impulzus és energia a kölcsönhatás utáni (12) átlagértékek és a kezdeti értékek különbségként kapható meg:

$$(13) \quad \Delta p^- = \bar{p}_a - mv \approx -\frac{\hbar\omega_L}{c}, \quad \Delta \varepsilon^- = \bar{\varepsilon}_a - \frac{mv^2}{2} \approx -\frac{\hbar\omega_L v}{c}.$$

6. Energia- és impulzusátadás egy $+x$ irányú lézersugárral

Ha a foton nem szemből, hanem az atommal azonos irányból érkezik, teljesen hasonló módon ellentétes előjelű eredményeket kapunk az átlagos energia- és impulzusátadásra:

$$(14) \quad \Delta p^+ \approx \frac{\hbar \omega'_L}{c}, \quad \Delta \varepsilon^+ \approx \frac{\hbar \omega'_L v}{c}.$$

II. rész: Disszipáció és az optikai szirup alapjai

A feladat közlése szerint a laboratóriumban *nyugalomban* levő atomok

$$(15) \quad P_g(\omega_L) = \frac{N_g}{N} = \frac{\Omega_R^2}{(\omega_0 - \omega_L)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2}.$$

valószínűséggel találhatók gerjesztett állapotban az ω_L frekvenciájú fotonokkal való kölcsönhatás eredményeként. A képletben Ω_R az úgynevezett Rabi-frekvencia, melynek négyzete a lézer intenzitásával arányos, Γ pedig az adott átmenet élettartamának reciproka. Látható, hogy ez a valószínűség $\omega_L = \omega_0$ esetén maximális, nem haladja meg az $\frac{1}{2}$ értéket, és $|\omega_L - \omega_0| \gg \Gamma, \Omega_R$ esetén gyorsan csökken.

7. A lézer által az atomnyalábra kifejtett erő

A (15) képlet nyugalomban levő atomokra vonatkozik, tehát csak úgy használhatjuk, ha áttérünk az atomokkal együtt v sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszerbe. Ekkor azonban Doppler-eltolódás miatt a $-x$ irányban haladó fotonok frekvenciáját $\omega^- = \omega_L \left(1 + \frac{v}{c}\right)$ -nek, míg a $+x$ irányban haladókat $\omega^+ = \omega_L \left(1 - \frac{v}{c}\right)$ -nek észleljük. Mindkét fotonnyaláb egymástól függetlenül gerjeszti az atomok $N_g = NP_g$ részét, így időegységként ΓN_g elnyelési-kibocsátási folyamat megy végbe a balra, illetve jobbra haladó fotonokkal. Felhasználva a (13) és (14) eredményeket, a keresett erő:

$$\begin{aligned} F &= \Gamma N (P_g(\omega^-) \Delta p^- + P_g(\omega^+) \Delta p^+) = \\ &= \frac{\Omega_R^2 N \Gamma \hbar \frac{\omega_L}{c}}{(\omega_0 - \omega_L (1 - \frac{v}{c}))^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2} - \frac{\Omega_R^2 N \Gamma \hbar \frac{\omega_L}{c}}{(\omega_0 - \omega_L (1 + \frac{v}{c}))^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2}. \end{aligned}$$

8. Kissebességű határeset

Az erőre kapott formula

$$F = \frac{A}{B+C} - \frac{A}{B-C} \approx \frac{A}{B} \left(1 - \frac{C}{B} - \left(1 + \frac{C}{B}\right)\right) = -\frac{2AC}{B^2}$$

alakú, ahol $C \ll B$. A számolást elvégezve azt kapjuk, hogy

$$(16) \quad F \approx -\frac{4\Omega_R^2 N \Gamma \hbar \left(\frac{\omega_L}{c}\right)^2}{\left((\omega_0 - \omega_L)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2\right)^2} (\omega_0 - \omega_L) v.$$

Látható, hogy az erő pozitív (gyorsító), ha $\omega_L > \omega_0$, zérus, ha $\omega_L = \omega_0$, és negatív (lassító), ha $\omega_L < \omega_0$. Természetesen a jelenség független az x tengely irányításától, tehát ha a lézer frekvenciáját kicsit az átmenet „alá hangoljuk”, akkor mindig az atom mozgásával ellentétes irányú a fotonok által kifejtett erő.

9. Optikai szirup

Ha az atomokra sebességükkel arányos fékezőerő hat, akkor mozgásegyenletük $m\dot{v} = -\beta v$, ahol a $\beta > 0$ konstans a (16) egyenletből kiolvasható. Figyelembevétel a $v(0) = v_0$ kezdeti feltételt, az atomok sebessége a

$$v(\tau) = v_0 e^{-\frac{\beta}{m}\tau}$$

függvény szerint csökken. Az ekvipartíció-tétel értelmében $T \sim v^2$, tehát a hőmérséklet $T(\tau) = T_0 e^{-\frac{2\beta}{m}\tau}$ időfüggést mutat.

3. feladat. Miért olyan nagyok a csillagok?

1. Csillagok központi hőmérsékletének klasszikus becslése

Akkor közelíti meg a két proton egymást d_c távolságra, ha mozgási energiájuk összege megegyezik a d_c távolsághoz tartozó elektromos potenciális energiával. A mozgási energiák az ekvipartíció-tételből határozhatók meg. Tehát

$$(17) \quad \frac{2m_p v_{\text{rms}}^2}{2} = 2 \frac{3}{2} k T_c = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d_c}, \quad \text{így} \quad T_c = \frac{q^2}{12\pi\epsilon_0 d_c k} = 5,5 \cdot 10^9 \text{ K}.$$

2. Annak igazolása, hogy az előző hőmérsékletbecslés hibás

A hidrosztatikai egyensúlyt leíró $\frac{\Delta P}{\Delta r} = -\frac{GM_r \rho_r}{r^2}$ egyenletben elvégezve a javasolt $\Delta r = R$, $\Delta P = -P_c$, $M_r = M$ és $\rho_r = \rho_c$ helyettesítéseket, a központi nyomásra azt kapjuk, hogy $P_c = \frac{GM\rho_c}{R}$. Ugyanakkor az ideális gáztörvény szerint

$$P_c = \frac{NkT_c}{V} = \frac{2\rho_c kT_c}{m_p},$$

ahol felhasználtuk, hogy $N = \frac{2M}{m_p}$, hiszen a protonok adják lényegében a csillag teljes tömegét, de az elektronok is hozzájárulnak a nyomáshoz. A két egyenletből megkapható a keresett központi hőmérséklet:

$$T_c = \frac{GMm_p}{2kR}.$$

Innen az M/R arány a (17) értékkel számolva:

$$(18) \quad \frac{M}{R} = \frac{2kT_c}{Gm_p} = 1,4 \cdot 10^{24} \frac{\text{kg}}{\text{m}}.$$

A Nap esetén ugyanez az arány $\frac{M_\odot}{R_\odot} = 2,9 \cdot 10^{21} \frac{\text{kg}}{\text{m}}$, ami három nagyságrenddel kisebb, mint az előző elmélet jóslata!

3. Csillagok központi hőmérsékletének kvantummechanikai becslése

Megoldásunk hasonló az 1. ponthoz. A következő egyenleteket írhatjuk föl:

$$(19a) \quad \text{ekvipartíció-tétel:} \quad \frac{1}{2}m_p v_{\text{rms}}^2 = \frac{3}{2}kT_c,$$

$$(19b) \quad \text{mechanikai energiamegmaradás:} \quad m_p v_{\text{rms}}^2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d_c},$$

$$(19c) \quad \text{de Broglie-hullámhossz:} \quad d_c = \frac{\lambda_p}{\sqrt{2}} = \frac{h}{\sqrt{2}m_p v_{\text{rms}}}.$$

Az egyenletrendszer egyszerű megoldható T_c -re:

$$(20) \quad T_c = \frac{q^4 m_p}{24\pi^2 \epsilon_0^2 k h^2} = 9,7 \cdot 10^6 \text{ K}.$$

A (18) összefüggés felhasználásával ehhez a hőmérséklethez tartozó M/R arány $2,4 \cdot 10^{21} \frac{\text{kg}}{\text{m}}$, ami már közel azonos a Nap esetén megfigyelésekből számolt értékkel.

4. Csillagok tömeg/sugár aránya

Felhasználva az (18) és a (20) formulákat,

$$(21) \quad \frac{M}{R} = \frac{q^4}{12\pi^2 \epsilon_0^2 G h^2},$$

ami valóban kizárólag univerzális fizikai állandóktól függ.

5. A legkisebb csillagok tömege és sugara

Az elektronok száma megegyezik a protonok számával, ami $\frac{M}{m_p}$, tehát

$$(22) \quad n_e = \frac{M}{m_p V} = \frac{3M}{4\pi R^3 m_p}.$$

Ez azt jelenti, hogy a szomszédos elektronok közti tipikus távolság $d_e = n_e^{-\frac{1}{3}}$. (Számolhatunk úgy, mintha az elektronok egy szabályos, d_e rácsállandójú köbös rácsban helyezkednének el a csillag belsejében.)

A legkisebb sugarat kicsit hosszadalmas, de egyszerű számolással kaphatjuk meg. Induljunk ki a $d_e \geq \frac{\lambda_e}{2^{1/2}} = \frac{h}{2^{1/2} m_e v_e}$ egyenlőtlenségből, ahol v_e az elektronok termikus sebességét jelöli. Az ekvipartíció-tétel alapján $v_e = \sqrt{\frac{3kT_c}{m_e}}$, a d_e tipikus távolságot kifejeztük a (22) egyenletben felírt elektronsűrűséggel, az M tömeget beírhatjuk a (21) egyenletből, és a T_c hőmérsékletet megadja a (20) formula. Ezeket a behelyettesítéseket mind elvégezve, rendezés után a következő egyenlőtlenséget kapjuk a csillag sugarára:

$$R \geq \frac{\epsilon_0^{1/2} h^2}{2^{1/2} q m_e^{3/4} m_p^{5/4} G^{1/2}} = 6,9 \cdot 10^7 \text{ m} = 0,10 R_\odot.$$

Ezután a minimális tömeget a (21) egyenletből kaphatjuk meg:

$$M \geq 1,7 \cdot 10^{29} \text{ kg} = 0,09 M_{\odot}.$$

6. Hélium-fúzió öregebb csillagokban

Jelölje v_{He} a hélium atommagok termikus sebességét. Két ütköző mag együttes $m_{\text{He}}v_{\text{He}}^2$ mozgási energiája megegyezik a $d_c = \frac{\lambda_{\text{He}}}{\sqrt{2}} = \frac{h}{\sqrt{2}m_{\text{He}}v_{\text{He}}}$ távolsághoz tartozó $\frac{4q^2}{4\pi\epsilon_0 d_c}$ potenciális energiával, ahonnan a hélium atommagok termikus sebessége

$$v_{\text{He}} = \frac{\sqrt{2}q^2}{\pi\epsilon_0 h} = 2,0 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ezután a hőmérséklet az ekvipartíció-tételből számolható ki:

$$T_{\text{He}} = \frac{m_{\text{He}}v_{\text{He}}^2}{3k} = 6,5 \cdot 10^8 \text{ K}.$$

Ez az érték nagyságrendileg egyezik a pontosabb csillagmodellek eredményével.