A $d=-c$ jelöléssel (1) a következő alakba írható:

$$ax+by+dz=0, \tag{2}$$

$$a\sqrt{1-x^2}+b\sqrt{1-y^2}+d\sqrt{1-z^2}=0. \tag{3}$$

Az egyenletrendszernek (3) szerint csak olyan x, y, z hármas lehet megoldása, amelyre $-1\le x,\ y,\ z\le 1$. Ekkor vannak olyan $0\le\alpha$, β, $y\le\pi$ szögek, amelyekre $\cos\alpha=x$, $\cos\beta=y$, $\cos\gamma=z$. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\mathbf{a}=(a\,\cos\alpha;\ a\,\sin\alpha)$$
$$\mathbf{b}=(b\,\cos\beta;\ b\,\sin\beta)$$
$$\mathbf{d}=(d\,\cos\gamma;\ d\sin\gamma)$$

Ezek segítségével az egyenletrendszer az $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{d}=\mathbf{0}$ alakba írható, tehát a három vektornak egy háromszöget kell alkotnia. Így a valós számok körében való megoldhatóság szükséges feltétele, hogy teljesüljenek az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{d}$ vektorokra a háromszög-egyenlőtlenségek, azaz mivel $|\mathbf{a}|=|a|$, $|\mathbf{b}|=|b|$, és $|\mathbf{c}|=|c|$,

$$|a|\le|b|+|c|,\ \ |b|\le|a|+|c|,\ \ |c|\le|a|+|b|. \tag{4}$$

Ezenfelül (3) szerint a, b és d nem lehet azonos előjelű, vagy másképpen fogalmazva:

(5) a és b közül legalább az egyik előjele azonos kell legyen c előjelével.

Megmutatjuk, hogy a (4) és (5) feltételek elégségesek is. Tegyük fel, hogy a, b és c megfelel ezeknek. Feltesszük, hogy a $a>0$, $c>0$, a többi eset hasonlóan intézhető el. Szerkesszünk egy negatív körüljárású, esetleg elfajuló ABC háromszöget $BC=|a|$, $AC=|b|$, $AB=|c|$ oldalakkal. Helyezzük el ezt egy derékszögű koordináta-rendszerben úgy, hogy C az origóba essen és BA párhuzamos legyen az x-tengellyel. A háromszög CB és CA oldalai α és γ szöget zárjanak be az x-tengely pozitív felével, ezekre $0\le\alpha$, $\gamma\le\pi$. Legyen továbbá $\beta=0$ vagy $\beta=\pi$ aszerint, hogy b pozitív-e vagy sem. Könnyen látható, hogy az $x=\cos\alpha$, $y=\cos\beta$, $z=\cos\gamma$ gyökhármas kielégíti (1)-et.

Varga Lívia (Zalaegerszeg, Ságvári E. Gimn., IV. o. t.)