I. rész

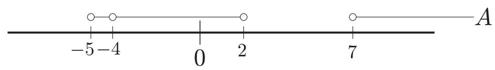
1. *Legyen az A halmaz az a), a B halmaz a b) kifejezés értelmezési tartománya.*

$$a)\qquad \log_{x+5}(x^2-9x+14), \qquad b)\qquad \sqrt{\frac{10-x}{x^2+4}}.$$

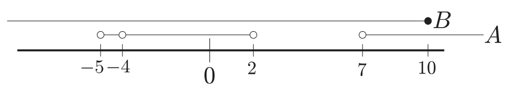
Ábrázoljuk számegyenesen a $B \setminus A$ halmaz elemeit. (*11 pont*)

Megoldás. Az $a)$ részben szereplő kifejezés esetében a következő feltételeknek kell teljesülni: $x+5>0$, $x+5\neq 1$ és $x^2-9x+14>0$. Az első két feltételből $x>-5$ és $x\neq -4$. A másodfokú egyenlőtlenség zérushelyei: $x_1=2$, $x_2=7$, tehát az egyenlőtlenség megoldása: $x<2$ vagy $x>7$.

Mindent összevetve: $A = \,]-5;-4] \cup\,]-4;2] \cup\,]7;\infty]$. Ezek után ábrázoljuk az A halmaz elemeit a számegyenesen.



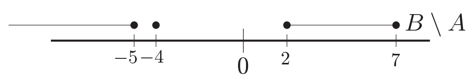
A $b)$ részben szereplő kifejezés esetében a $\dfrac{10-x}{x^2+4} \geq 0$ egyenlőtlenségnek kell teljesülnie. Mivel e tört nevezője minden x-re pozitív, így az egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha $10-x\geq 0$, azaz $x\leq 10$. Vagyis: $B = \,]-\infty;10]$. A B halmazt is ábrázoljuk a számegyenesen.



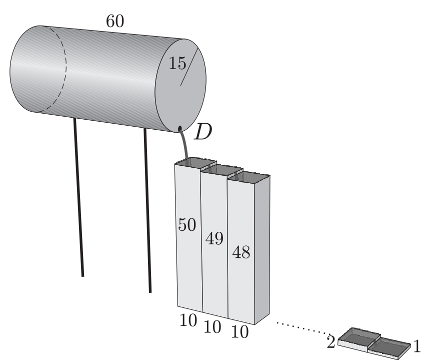
A $B\setminus A$ halmaz elemeit úgy kapjuk, hogy a B halmaz elemei közül kiveszünk minden olyan elemet, mely A-nak is eleme.

Tehát: $B\setminus A = \,]-\infty;-5] \cup \{-4\} \cup [2;7]$.

Számegyenesen ábrázolva:



2. *Egy egyenes körhenger alakú zárt tartály alapkörének sugara* 15 cm, *magassága* 60 cm. *A tartályt vízszintes helyzetben két rúdra erősítették. A vízzel félig töltött tartály alján van egy D dugó (lásd* ábra*). Ha ezt kihúzzák, akkor a tartály alá helyezett egyenes hasáb alakú felül nyitott edényekbe folyik a víz. Minden hasáb alapnégyzetének oldala* 10 cm. *Az első hasáb magassága* 50 cm, *a másodiké* 49 cm, *a harmadiké* 48 cm *és így tovább. Amikor az első hasáb megtelik, onnan átfolyik a másodikba, ha az is megtelik, akkor átfolyik a harmadikba stb.*



Hány hasáb telik meg vízzel? (*12 pont*)

Megoldás. A tartályban levő víz térfogata a tartály térfogatának a fele.

$$V_{\text{víz}} = \frac{r^2\pi m}{2} = \frac{15^2\pi\cdot 60}{2} \approx 21\,205{,}75.$$

Az edények térfogatát sorban kiszámoljuk: $V_{50}=5000$, $V_{49}=4900$, $V_{48}=4800$, $V_{47}=4700$, $V_{46}=4600$, $\ldots$. Mivel

$$5000+4900+4800+4700 = 19\,400 \quad \text{és} \quad 5000+4900+4800+4700+4600 = 24\,000,$$

azért 4 db edény (az 50, 49, 48 és 47 cm magas) telik meg vízzel.

3. *A négyzetszámokat „csomagokba” helyezzük az alábbi módon:*
1. *csomag:* (1),
2. *csomag:* $(4, 9)$,
3. *csomag:* $(16, 25, 36)$,
4. *csomag:* $(49, 64, 81, 100)$, stb.
a) Melyik számmal kezdődik a 16. *csomag?*
b) Melyik csomagban szerepel a 8281 *négyzetszám?* (*14 pont*)

Megoldás. *a*) Az első csomagban 1, a másodikban 2, a harmadikban 3, stb. ..., az n-edik csomagban n darab négyzetszám szerepel. Így a 16. csomagban szereplő első szám az előtte szereplő 15 csomagban levő összes négyzetszámot követő első négyzetszám. Az első 15 csomagban levő számok száma:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 15 = \frac{(1 + 15) \cdot 15}{2} = 120.$$

Ezek szerint a 16. csomag a 121. négyzetszámmal kezdődik, vagyis a csomagban szereplő első szám: $121^2 = 14\,641$.

b) A k-adik csomag első száma az előtte levő $k-1$ csomagban szereplő összes négyzetszámot követő első négyzetszám. Az első $k - 1$ csomagban levő számok száma

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (k - 1) = \frac{k(k - 1)}{2},$$

így a k-adik csomag a $\left(\frac{k(k-1)}{2} + 1\right)$-edik négyzetszámmal, míg a $(k + 1)$-edik csomag a $\left(\frac{k(k+1)}{2} + 1\right)$-edik négyzetszámmal kezdődik.

Ha a 8281 a k-adik csomagban van, akkor

$$\left[\frac{k(k-1)}{2} + 1\right]^2 \le 8281 < \left[\frac{k(k+1)}{2} + 1\right]^2.$$

Vonjunk négyzetgyököt az egyenlőtlenség-láncolat tagjaiból:

$$\frac{k(k-1)}{2} + 1 \le 91 < \frac{k(k+1)}{2} + 1, \quad \frac{k(k-1)}{2} \le 90 < \frac{k(k+1)}{2},$$

$$k(k - 1) \le 180 < k(k + 1).$$

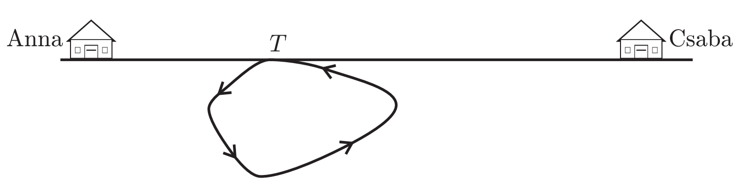
Az egyenlőtlenség-láncolat két szélén egy-egy szomszédos egész szám szorzata szerepel. Kevés próbálkozással – hogy ne kelljen a másodfokú egyenlőtlenségeket megoldanunk – megkapjuk, hogy

$$13 \cdot 12 = 156 \le 180 < 13 \cdot 14 = 182.$$

Tehát $k = 13$, vagyis a 8281 a 13. csomagban szerepel.

Megjegyzés. Bár nem tartozott a feladathoz, de érdekességként számoljuk ki, hogy a 8281 a 13. csomagnak hányadik tagja. A 13. csomagban 13 négyzetszám van és – mint láttuk – a $\frac{13 \cdot 12}{2} + 1 = 79$-edik négyzetszámmal kezdődik. Mivel a $8281 = 91^2$, tehát a 91. négyzetszám, így a 8281 négyzetszám a 13. csomag utolsó tagja.

4. *Anna és Csaba háza egy egyenes út mentén található. Egy alkalommal megbeszélték, hogy együtt mennek kerékpározni. Déli* 12 *órakor a házaik közötti útszakasz egy olyan pontjában találkoztak, ahonnan egy biciklis körút indul.*



Találkozáskor Anna napi átlagsebesség-mérője 23 km/h, *Csabáé pedig* 28 km/h *átlagsebességet jelzett. (Ezen a napon délig mindketten csak erre az útra használták a kerékpárjukat.) A* 26 km*-es körutat* 1 *óra alatt tették meg, ekkor a déli találkozási pontba visszaérve elbúcsúztak egymástól és mindketten hazamentek. A búcsúzáskor Anna átlagsebességmérője* 25 km/h*-t, Csabáé* 27 km/h*-t mutatott. Milyen messze lakik egymástól Anna és Csaba?* (*14 pont*)

Megoldás. Legyen S_a és t_a az Anna által a találkozásig megtett út, illetve a ráfordított idő. Ekkor átlagsebessége: $\frac{S_a}{t_a} = 23$, vagyis $S_a = 23t_a$. A találkozás után egy órát bicikliztek és 26 km utat tettek meg, így az átlagsebessége:

$$\frac{S_a + 26}{t_a + 1} = 25, \quad \text{azaz} \quad S_a + 26 = 25t_a + 25.$$

Felhasználva az előbb S_a-ra kapott kifejezést:

$$23t_a + 26 = 25t_a + 25, \quad \text{amiből} \quad 2t_a = 1, \quad \text{azaz} \quad t_a = \frac{1}{2}.$$

Ezzel számolva kapjuk, hogy $S_a = 23 \cdot \frac{1}{2}$. Tehát Anna a találkozásig 11,5 km utat tett meg.

Most számoljuk ki azt, hogy Csaba mekkora utat tett meg a találkozásig. Ha ez az út S_c, a ráfordított idő t_c, akkor átlagsebessége $\frac{S_c}{t_c} = 28$, vagyis $S_c = 28t_c$. Az egy órás körút megtétele után napi átlagsebessége:

$$\frac{S_c + 26}{t_c + 1} = 27, \quad \text{azaz} \quad S_c + 26 = 27t_c + 27.$$

Azt kaptuk Csaba esetében, hogy

$$28t_c + 26 = 27t_c + 27, \quad \text{ahonnan} \quad t_c = 1, \quad \text{továbbá} \quad S_c = 28.$$

Vagyis Csaba a találkozásig 28 km utat tett meg. Ezek szerint Anna és Csaba 39,5 km-re lakik egymástól.

II. rész

5. *Egy svájci kantonban olyan lottójáték van forgalomban, melynél az első* 50 *pozitív egész számból kell* 5*-öt eltalálni. Egy szenvedélyes lottózó először kiválasztja az első két számot, majd harmadiknak az első kettő összegét, negyediknek az első három összegét, végül ötödiknek az első négy szám összegét.*

a) Legfeljebb mekkorának választhatja ez az ember a legkisebb számot?

b) Ha emberünk a legkisebb számot a lehető legnagyobbnak választja, akkor mely számok szerepelhetnek a kitöltött szelvényén?

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy emberünknek telitalálata lesz, ha a fenti eljárásnak megfelelően minden lehetséges módon kitölt egy-egy szelvényt? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Legyen a kiválasztott két szám a és b ($a < b$). Ekkor a lottószelvényen megjátszott számok: a, b, $a + b$, $2a + 2b$, $4a + 4b$. Mivel a megjátszható legnagyobb szám 50, azért $4a + 4b \leq 50$, azaz $a + b \leq 12{,}5$. Mivel $a < b$, azért ez csak úgy lehetséges, ha $a \leq 5$. Tehát ilyen módon a megjátszható legkisebb szám legfeljebb 5 lehet.

b) Mivel a legkisebb megjátszható számok közül a legnagyobb 5, és $5 + b \leq 12$, azért a második szám értéke csak 6 vagy 7 lehet. Ezek szerint, ha emberünk a legkisebbnek kiválasztható számok közül a legnagyobbat, azaz az 5-öt választja, akkor az alábbi számokat játszhatja meg: 5, 6, 11, 22, 44 vagy 5, 7, 12, 24, 48.

c) Nézzük meg, hogy a kitöltési eljárás szerint hányfajta lottószelvényt lehet megjátszani.

Ha a legkisebb kiválasztott szám az 5, akkor – mint láttuk – két szelvénnyel lehet játszani.

Ha a legkisebb kiválasztott szám a 4, akkor a $4 + b \leq 12$ alapján b értékei: 8, 7, 6 vagy 5. Ezek szerint ekkor négy szelvénnyel lehet játszani.

Ha a legkisebb kiválasztott szám 3, akkor b lehetséges értékei: 9, 8, 7, 6, 5 vagy 4. Így ez esetben hat szelvénnyel lehet játszani.

Ha a kiválasztott legkisebb szám 2, akkor b lehetséges értékei: 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4 vagy 3. Vagyis ekkor nyolc szelvénnyel lehet játszani.

Ha a kiválasztott legkisebb szám 1, akkor b lehetséges értékei: 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 vagy 2. Vagyis ekkor tíz szelvénnyel lehet játszani.

Tehát: a megadott módon kitölthető lottószelvények száma: $2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$.

A kérdéses lottójátékban minden lehetséges módon kitölthető szelvények száma:

$$\binom{50}{5} = 2\,118\,760.$$

A megadott eljárással kitöltött összes szelvény között $\frac{30}{2\,118\,760} \approx 0{,}000\,014\,16$ a valószínűsége a telitalálatnak.

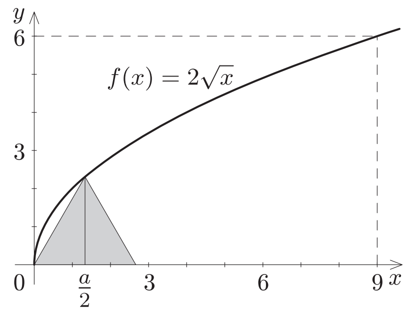
6. *Adott a* $[0; 9]$ *intervallumon értelmezett* $f(x) = 2\sqrt{x}$ *függvény.*

a) Egy szabályos háromszög egyik csúcsa az origó, egy másik csúcsa az x tengelyre, a harmadik csúcsa pedig az $f(x)$ függvény görbéjére illeszkedik. Mekkora e háromszög területe?

b) Egy téglalap egyik oldala az x tengelyre, egy másik oldala az $x = 9$ egyenesre, egy csúcsa pedig az $f(x)$ függvény görbéjére illeszkedik. Határozzuk meg a legnagyobb ilyen téglalap területét.

c) Az $f(x)$ függvénygörbe és az x tengely közötti területet az $x = a$ egyenes felezi. Határozzuk meg az a paraméter értékét. *(16 pont)*

Megoldás. *a)* Ha a szabályos háromszög a oldalú, akkor az $x = \frac{a}{2}$ helyen felvett függvényérték egyenlő kell legyen e háromszög magasságával (*1. ábra*).



1. ábra

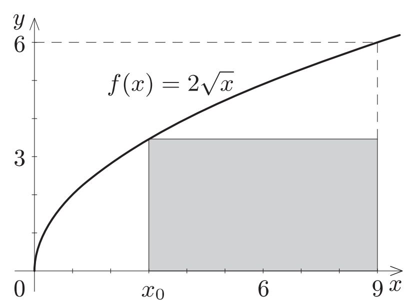
Tehát

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{2}}, \quad \text{azaz} \quad \frac{3a^2}{4} = \frac{4a}{2},$$

ahonnan az egyedüli pozitív megoldás: $a = \frac{8}{3}$. A háromszög területe:

$$T = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\frac{64}{9}\sqrt{3}}{4} = \frac{16\sqrt{3}}{9} \approx 3{,}08.$$

b) Legyen a téglalap egyik oldala az $x = x_0$ egyenesen. Ekkor a téglalap oldalainak hossza $9 - x_0$ és $2\sqrt{x_0}$, ahol $0 < x_0 < 9$ (*2. ábra*).



2. ábra

Ekkor a téglalap területe az x_0 függvényében:

$$T(x_0) = 2\sqrt{x_0} \cdot (9 - x_0) = 18\sqrt{x_0} - 2\sqrt{x_0^3}.$$

E függvénynek akkor lehet szélsőértéke, ha a deriváltja 0.

$$T'(x_0) = 18 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_0}} - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x_0} = \frac{9}{\sqrt{x_0}} - 3\sqrt{x_0} = 0, \quad \text{azaz} \quad \frac{9}{\sqrt{x_0}} = 3\sqrt{x_0},$$

ahonnan $x_0 = 3$. A $T'(x) = \frac{9}{\sqrt{x}} - 3\sqrt{x}$ függvény $x = 3$-ban előjelet váltva 0, hiszen $x < 3$ esetén $T'(x) > 0$, $x > 3$ esetén pedig $T'(x) < 0$. Mindez azt jelenti, hogy a $T(x)$ függvénynek $x = 3$–ban valóban szélsőértéke, mégpedig maximuma van.

Tehát a beírható legnagyobb területű téglalap területe: $2\sqrt{3} \cdot (9 - 3) = 12\sqrt{3}$.

c) Ha az $x = a$ egyenes felezi a függvénygörbe és az x tengely közötti területet, akkor

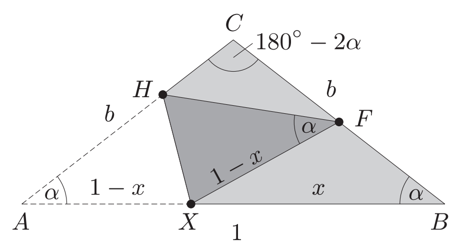
$$2 \cdot \int_0^a 2\sqrt{x}\,dx = \int_0^9 2\sqrt{x}\,dx, \quad \text{azaz} \quad 2 \cdot \int_0^a \sqrt{x}\,dx = \int_0^9 \sqrt{x}\,dx.$$

$$2 \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3}\right]_0^a = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^9, \quad \text{tehát} \quad \frac{4}{3} \cdot \sqrt{a^3} = \frac{2}{3} \cdot 27, \quad \text{azaz} \quad \sqrt{a^3} = \frac{27}{2},$$

ahonnan kapjuk az a paraméter értékét:

$$a = \frac{9}{\sqrt[3]{4}} \approx 5{,}67.$$

7. *Egy óbudai vendéglőben az egyenlő szárú háromszög alakú szalvétákat úgy hajtogatják, hogy az ABC háromszög AB alapjának A csúcsa a BC szár F felezőpontjába kerüljön. Ekkor a hajtás élének egyik végpontja az AC szár C-hez közelebbi H harmadoló pontjába kerül.*



Hová kerül a hajtás élének másik (X) végpontja? (*16 pont*)

Megoldás. Legyen az ABC egyenlő szárú háromszög AB alapja egységnyi, szárai pedig b hosszúak, és legyen a BX szakasz hossza x. A hajtogatás miatt $AX = XF = 1 - x$. Ha az ABC háromszög alapján levő szögek nagysága α, akkor $ACB\sphericalangle = 180^\circ - 2\alpha$.

Írjuk föl először a HFC háromszög HF oldalára a koszinusztételt. Mivel $HC = \frac{1}{3}b$, $HF = \frac{2}{3}b$, $FC = \frac{1}{2}b$, azért

$$\left(\frac{2}{3}b\right)^2 = \left(\frac{1}{3}b\right)^2 + \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3}b \cdot \frac{1}{2}b \cdot \cos(180^\circ - 2\alpha).$$

Innen

$$\cos(180^\circ - 2\alpha) = -\cos 2\alpha = -\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = -\cos^2\alpha + 1 - \cos^2\alpha = 1 - 2\cos^2\alpha,$$

azért azt kapjuk, hogy

$$\frac{4b^2}{9} = \frac{b^2}{9} + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{3} + \frac{2b^2}{3}\cos^2\alpha, \quad \text{azaz} \quad \frac{4}{9} = \frac{1}{9} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos^2\alpha,$$

ahonnan $\cos^2\alpha = \frac{5}{8}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$ (negatív nem lehet, mert α hegyesszög).

Az ABC háromszögben pedig:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{1}{2}}{b} = \frac{1}{2b}, \quad \text{így} \quad \frac{1}{2b} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}, \quad \text{vagyis} \quad b = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}.$$

Most írjuk fel a koszinusztételt az FBX háromszög FX oldalára is.

$$(1-x)^2 = x^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}\right)^2 - 2x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} \cdot \cos\alpha,$$

$$1 - 2x + x^2 = x^2 + \frac{1}{10} - 2x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}},$$

$$\frac{9}{10} - 2x = -\frac{x}{2}, \quad \text{azaz} \quad \frac{9}{10} = \frac{3}{2}x, \quad \text{ahonnan} \quad x = \frac{3}{5}.$$

Azt kaptuk, hogy az ABC háromszög AB alapján $BX = \frac{3}{5}$, $AX = \frac{2}{5}$, tehát a hajtás szélének másik végpontja az AB oldalnak az A csúcshoz közelebbi $3:2$ arányú osztópontja lesz.

8. *Karcsi meglátott a kirakatban egy igen kedvező árú sportcipőt. Bement, hogy megvásárolja, de legnagyobb megdöbbenésére a pénztárnál a kirakatban látott ár négyszeresét akarták fizettetni vele. Kiderült, hogy a kirakatrendező a cipő árát jelző négyjegyű szám számjegyeit véletlenül fordított sorrendben írta ki. Mennyibe került a sportcipő?* (*16 pont*)

Megoldás. Ha a cipő ára $\overline{abcd}$ négyjegyű szám, akkor Pisti a kirakatban a $\overline{dcba}$ négyjegyű számot látta. A feltételek szerint $\overline{abcd} = 4 \cdot \overline{dcba}$. A kapott egyenlőség jobb oldalán páros szám áll, így a bal oldalnak is párosnak kell lennie, azaz d páros számjegy. Az is biztos, hogy $d \leq 2$. Ha ugyanis $d > 2$ lenne, akkor az egyenlet jobb oldalán már ötjegyű szám szerepelne, ami nem lehet egyenlő egy négyjegyű számmal. Mindebből az következik, hogy csak a $d = 2$ lehetséges. Ekkor $\overline{abc2} = 4 \cdot \overline{2cba}$.

Most azt látjuk, hogy az egyenlet jobb oldalának értéke 8000-nél nagyobb. Ez azt jelenti, hogy a értéke 8 vagy 9. Mivel a jobb oldali szám utolsó jegyét, az a-t 4-gyel kell szorozni, és ennek a szorzatnak az utolsó jegye 2 lesz (a bal oldalon 2 az utolsó jegy), ezért csak $a = 8$ lehet. Vagyis $\overline{8bc2} = 4 \cdot \overline{2cb8}$.

Írjuk ki részletesen ez utóbbi egyenletet:

$$8000 + 100b + 10c + 2 = 4 \cdot (2000 + 100c + 10b + 8),$$

$$8002 + 100b + 10c = 8032 + 400c + 40b,$$

$$60b = 30 + 390c,$$

$$2b = 1 + 13c.$$

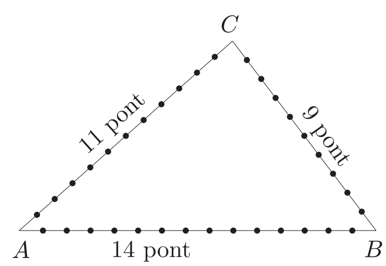
Mivel a kapott egyenlet bal oldalának értéke legfeljebb 18, ezért a jobb oldalon c értéke csak 1 lehet ($c = 0$ nem lehetséges, hiszen ekkor b-re nem kapnánk egész számot). Ha $c = 1$, akkor $2b = 14$, ahonnan $b = 7$.

Azt kaptuk tehát, hogy $a = 8$, $b = 7$, $c = 1$, $d = 2$. A cipő ára 8712 Ft. (A kirakatban 2178 Ft szerepelt, és valóban: $8712 = 4 \cdot 2178$.)

9. *a*) *Az ABC háromszög oldalai* 10, 12 *és* 15 cm *hosszúak. Az oldalakon (az oldalak végpontjait kivéve) minden egész cm helyen megjelöltük a pontokat. Ezután képeztük az összes olyan háromszöget, melynek csúcspontjai a megjelölt pontok közül valók. Hány darab ilyen háromszöget képezhetünk?*

b) *A PQR szabályos háromszög oldalai n cm hosszúak, ahol $n > 2$ egész szám. Az oldalakon (az oldalak végpontjait kivéve) minden egész* cm *helyen megjelöltük a pontokat. Ezután képeztük az összes olyan háromszöget, melynek csúcspontjai a kijelölt pontok közül valók, majd képeztük az összes olyan négyszöget, melynek két csúcsa egy oldalon, másik két csúcsa pedig a háromszög másik, illetve a harmadik oldalának kijelölt pontjai közül való. Miből van több: háromszögből vagy négyszögből?* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Ha a háromszög oldalainak egész értékeinél (a végpontokat kivéve) helyeztünk el egy-egy pontot, akkor a háromszög egyes oldalain elhelyezett pontok száma 14, 11 és 9. Legyen $AB = 15$, $BC = 10$ és $AC = 12$.



Ha a háromszög két csúcsát az AB oldalról választottuk, akkor ezt $\binom{14}{2}$-féleképpen tehettük meg. Ekkor a harmadik pont vagy az AC oldalon, vagy a BC oldalon van, így a harmadik pont választására 20 lehetőségünk van, tehát a háromszögek szám: $20 \cdot \binom{14}{2}$.

Hasonlóképpen adódik a háromszögek száma, ha a háromszög két csúcsát az AC oldalról választjuk: $23 \cdot \binom{11}{2}$. Ha pedig a BC oldalról választjuk a két pontot, akkor a háromszögek száma: $25 \cdot \binom{9}{2}$. Ha mindhárom oldalról egy-egy csúcsot választunk, akkor a háromszögek száma: $14 \cdot 11 \cdot 9$. Összeadva:

$$\binom{14}{2} \cdot 20 + \binom{11}{2} \cdot 23 + \binom{9}{2} \cdot 25 + 14 \cdot 11 \cdot 9 = 5371.$$

Tehát a képezhető háromszögek száma 5371.

b) Az n oldalú ($n > 2$) szabályos háromszög minden oldalán $n - 1$ db pontot jelöltünk meg. Számoljuk össze a képezhető háromszögek és négyszögek számát.

Kezdjük a háromszögekkel. Ha valamelyik oldalra két csúcsot teszünk, akkor azt $\binom{n-1}{2}$-féleképpen választhatjuk ki. A harmadik csúcs valamelyik másik oldalon kell, hogy legyen, vagyis $2(n-1)$ pont közül választható. Azt az oldalt, amelyiken két csúcs lesz, háromféleképpen választhatjuk ki, így e háromszögek száma:

$$3 \cdot 2 \cdot \binom{n-1}{2} \cdot (n-1) = 3 \cdot (n-2)(n-1)^2.$$

Az olyan háromszögek száma, ahol mindhárom csúcs különböző oldalon van: $(n-1)^3$. Tehát az összes képezhető háromszögek száma: $3(n-2)(n-1)^2 + (n-1)^3$.

Most számoljuk össze a képezhető négyszögeket. Arról az oldalról, melyen a négyszögnek két csúcsa van a csúcsokat $\binom{n-1}{2}$-féleképpen választhatjuk ki. A másik két csúcs közül egy-egy a másik két oldalon van. Mivel a kétcsúcsú oldalt 3-féleképpen választhatjuk ki, ezért az összes képezhető négyszögek száma

$$3 \cdot \binom{n-1}{2} \cdot (n-1)^2 = 3 \cdot \frac{(n-2)(n-1)^3}{2}.$$

Vizsgáljuk meg, milyen n-re lesz több négyszög, mint háromszög. Tekintsük az alábbi egyenlőtlenséget:

$$3 \cdot \frac{(n-2)(n-1)^3}{2} \geq 3(n-2)(n-1)^2 + (n-1)^3,$$

$$3 \cdot \frac{(n-2)(n-1)}{2} \geq 3(n-2) + n - 1,$$

$$3(n^2 - 3n + 2) \geq 8n - 14,$$

$$3n^2 - 17n + 20 \geq 0.$$

A kapott másodfokú kifejezés zérushelyei:

$$n_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 240}}{6} = \frac{17 \pm 7}{6}, \quad \text{azaz} \quad n_1 = \frac{5}{3}, \quad n_2 = 4.$$

Tehát az egyenlőtlenség megoldása: $n \leq \frac{5}{3}$ vagy $n \geq 4$.

A következőre jutottunk: ha $n = 3$, akkor háromszögből van több; ha $n = 4$, akkor ugyanannyi háromszög képezhető, mint négyszög, végül, ha $n > 4$, akkor négyszögből több van, mint háromszögből.