I. kategória: Szakközépiskolák

Első (iskolai) forduló

1. Bizonyítsa be, hogy a kocka éléből, lapátlójából és testátlójából háromszög szerkeszthető, és ennek a háromszögnek van két egymásra merőleges súlyvonala!

2. Legyenek az a, b, c, d számok pozitív valós számok! Igazolja, hogy $\sqrt{a \cdot b} + \sqrt{c \cdot d} \leq \sqrt{(a+d) \cdot (b+c)}$!

3. Ha az x, y, z valós számok eleget tesznek az

$$x + 3y + 5z = 200$$

és az

$$x + 4y + 7z = 225$$

egyenleteknek, akkor mennyi a

$$K = x + y + z$$

értéke?

4. Oldja meg a valós számok halmazán az

$$\frac{[x]}{\{x\}} = 2008$$

egyenletet!

($[x]$ az x valós szám egészrésze, azaz az x-nél nem nagyobb egész számok közül a legnagyobb, $\{x\}$ pedig az x valós szám törtrésze, azaz $\{x\} = x - [x]$.)

5. Az ABC háromszög AC oldalán az E belső pont úgy helyezkedik el, hogy $EC = AB$. Legyen F a BC, M pedig az AE szakasz felezőpontja. Határozzuk meg a háromszög A csúcsánál lévő szögét, ha $FME\sphericalangle = 18°$!

6. Hányféle módon állítható elő a 2008 néhány (egynél több) egymást követő pozitív egész szám összegeként?

Második forduló

1. Oldja meg a valós számok halmazán a

$$\log_4(\log_8 x) = \log_8(\log_4 x)$$

egyenletet!

2. Az ABC derékszögű háromszögben az A csúcsnál levő belső szög 30°. A BC befogóra illeszkedő P pontból az AB átfogóra rajzolt merőleges talppontja legyen Q.

Határozza meg a $\dfrac{BP}{PC}$ arány értékét, ha a BPQ és a CPA háromszögek területei egyenlők!

3. Egy fiókban n darab füzet van, közülük néhány négyzetrácsos, a többi vonalas. Egymás után véletlenszerűen kiveszünk kettőt. Egy másik fiókban ugyancsak n darab füzet van, de kétszer annyi közöttük a négyzetrácsos, mint az előzőben. Ebből a fiókból is kiveszünk véletlenszerűen kettőt. Annak a valószínűsége, hogy a másodikból két négyzetrácsosat veszünk ki, ötször annyi, mint, annak, hogy az első fiókból veszünk ki két négyzetrácsosat. Hány négyzetrácsos füzet van az egyes fiókokban?

4. Hófehérke kosarában almák, Hamupipőke kosarában körték, Csipkerózsika kosarában barackok vannak. Minden kosárban 100-nál kevesebb gyümölcs van.

Hófehérke almáinak egy kilenced részét Hamupipőkének adja, másik egy kilenced részét Csipkerózsikának. Ekkor Hamupipőke a másik két mesehős mindegyikének odaadja a körtéinek egy nyolcad–egy nyolcad részét. Csipkerózsika rövid gondolkodás után azt mondja:

„én mindkettőtöknek odaadom a barackjaim egy hatod–egy hatod részét, mert akkor mindhármunknak ugyanannyi gyümölcs lesz a kosarában.”

Melyiküknek hány gyümölcse volt eredetileg, és mennyit adtak egymásnak, ha sem átadáskor, sem azután, egyikük sem darabolta a gyümölcsöket?

Mennyi lett a végén a kosaraikban levő gyümölcsök száma?

5. Oldja meg a valós (x, y) számpárok halmazán az

$$(x + y + 2009)^2 = 2 \cdot (xy + 2x + 2008) \cdot (-x + y - xy + 1)$$

egyenletet!

Harmadik (döntő) forduló

1. Egy háromszög oldalai a következők:

$$AB = \sqrt{x^2-1}\cdot\left(x^n + x^{n-1} + x^{n-2}\right),$$
$$BC = x^{n+1} + x^n + x^{n-1}$$
$$CA = x^n + x^{n-1} + x^{n-2},$$

ahol $x > 1$ valós szám és $n \in \mathbb{N}^+$, $n \geq 2$.

a) Bizonyítsa be, hogy a háromszög derékszögű!

b) Határozza meg az x valós szám értékét úgy, hogy a háromszög legkisebb szögének nagysága 30° legyen!

2. Legyen tetszőleges x valós szám esetén

$$f(x) = \frac{4^x}{4^x+2}!$$

a) Határozza meg az

$$f(x) + f(y)$$

összeget, ha x és y olyan valós számok, amelyek összege 1!

b) Határozza meg az

$$f\left(\frac{1}{2010}\right) + f\left(\frac{2}{2010}\right) + f\left(\frac{3}{2010}\right) + \ldots + f\left(\frac{2009}{2010}\right)$$

összeg pontos értékét!

3. Adja meg az összes olyan háromszöget, amelynek oldalai közvetlen egymás után következő páros egész számok, valamint az egyik belső szöge kétszer akkora, mint ennek a háromszögnek egy másik belső szöge!

II. kategória: Általános matematika tantervű gimnáziumok

Első (iskolai) forduló

1. Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszer valós megoldásait.

$$x^3 + y^3 = x, \tag{1}$$
$$3x^2y + 3xy^2 = y. \tag{2}$$

2. Tekintsük azokat a négyjegyű pozitív egész számokat, amelyeknek minden jegye különböző.
(a) Hány ilyen szám van?
(b) Mennyi ezeknek a számoknak az összege?
(c) Növekvő sorrendbe állítva őket melyik lesz a 2008-ik? (Az 1023 az első.)

3. Az egyenlőszárú ABC háromszögben $AB = AC$. BC egy tetszőleges belső P pontjából a szárakkal párhuzamosokat húzunk. Az AC-vel párhuzamos az AB-t Q-ban, az AB-vel párhuzamos az AC-t R-ben metszi. Határozzuk meg a PQR háromszögek súlypontjának halmazát, mértani helyét.

4. Adottak az A, B és C számok:

$$A = \frac{1}{2-\sqrt{3}}, \quad B = \left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\sqrt{5} + \sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{3}}\right), \quad C = \sqrt{7-4\sqrt{3}}.$$

Igazoljuk, hogy bármely pozitív egész n esetén irracionális az alábbi szám:

$$\sqrt{(A+B-C)n+2}.$$

5. A pozitív valós p paraméter segítségével definiáljuk a valós számok halmazán az f függvényt:

$$f(x) = \begin{cases} p|x-4| - 4p, & \text{ha } x \geq 0, \\ -p|x+4| + 4p, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Határozzuk meg p értékét, ha tudjuk, hogy egyetlen olyan négyzet van, amelynek minden csúcsa rajta van f grafikonján.

Második forduló

1. Adjuk meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az alábbi f függvény értelmezhető és határozzuk meg a függvény értékkészletét ezen az értelmezési tartományon.

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x - \sqrt{2 - x}}}.$$

2. Határozzuk meg a következő egyenlet valós megoldásait. ($[y]$ az y valós szám egész részét jelöli.)

$$\left[\frac{x}{2}\right] - \left[\frac{x}{3}\right] = \frac{x}{7}.$$

3. Egy 1 milliárd lakosú országban egy olcsó AIDS teszt bevezetését tervezik. Tudjuk, hogy kb. minden ezredik ember fertőzött. Kiderült, hogy a betegek 99,9%-ánál pozitív, viszont sajnos az egészségesek 0,1%-ánál is pozitív eredményt ad a teszt. Ilyen paraméterek mellett elvetették a használatát. Egy matematikus azt javasolta, hogy végezzék el kétszer egymás után a vizsgálatot és ha mindkettő pozitív, csak akkor küldjék orvoshoz a pácienst. Így már bevezethető lett a teszt. A következő két kérdéssel arra keressük a választ, mi ennek a magyarázata.

(a) Számítsuk ki mennyi a valószínűsége, hogy beteg valaki, ha az első teszt pozitív.

(b) Számítsuk ki mennyi a valószínűsége, hogy beteg valaki, ha mind a két teszt pozitív.

4. Az a, b, c oldalú t területű hegyesszögű háromszögre

$$abc = a + b + c$$

teljesül. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < t < \frac{3}{2}.$$

Harmadik (döntő) forduló

1. Határozzuk meg azon $k_1, k_2, \ldots, k_n$ és n pozitív egészeket, amelyekre

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_n = 5n - 4 \qquad \text{és} \qquad \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \ldots + \frac{1}{k_n} = 1.$$

2. A szabályos ABC háromszög belső P pontjának az AB, BC és CA oldalakra eső merőleges vetülete legyen rendre C', A' és B'. Jelölje az APC', BPA', CPB' és APB', BPC', CPA' háromszögekbe írt körök sugarát rendre r_1, r_2, r_3 és r_4, r_5, r_6. Bizonyítsuk be, hogy

$$r_1 + r_2 + r_3 = r_4 + r_5 + r_6.$$

3. A $H = \{1; 2; 3; \ldots; 9\}$ halmaz egy P *partíciójának* nevezzük azt, ha H-t diszjunkt részhalmazainak uniójaként írjuk fel. (A részhalmazok páronként közös elem nélküliek.) Jelölje $P(n)$ az n-t tartalmazó részhalmaz elemeinek számát ($n \in H$). Például a P: $\{1; 4; 5\} \cup \{2\} \cup \{3; 6; 7; 8; 9\} = H$ partíció esetén $P(6) = 5$.

Bizonyítsuk be, hogy H bármely P_1 és P_2 partíciójára található két különböző H-beli n és m elem, amelyekre $P_1(n) = P_1(m)$ és $P_2(n) = P_2(m)$.

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumok

Első (iskolai) forduló

1. Legyen $f(x) = 2$, ha $x \geq 0$, és $f(x) = 1$, ha $x < 0$. Legyen továbbá $g(x) = f(x)/f(x-1)$, és végül

$$h(x) = g(x) + 2g(x/2) + 3g(x/3) + \ldots + 2008g(x/2008).$$

Számítsuk ki $h(\pi)$-t.

2. Tükrözzük az ABC hegyesszögű háromszög egy belső pontját az AB, BC, CA oldalakra, a tükörképeket jelölje rendre R, P, illetve Q. Bizonyítsuk be, hogy az AQR, PBR és PQC köröknek van közös pontja.

3. Legyen n pozitív egész. Mutassuk meg, hogy akkor és csak akkor létezik racionális számok négyzeteiből álló, n differenciájú, háromtagú számtani sorozat, ha létezik n területű, racionális oldalú, derékszögű háromszög.

4. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok körében:

$$\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x-3}+\frac{7}{x-7}+\frac{9}{x-9}=x^2-5x-4.$$

5. Mennyi $2\cos\alpha+6\cos\beta+3\cos\gamma$ minimuma, ha $\alpha,\beta,\gamma\geq 0$ és $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$?

Második (döntő) forduló

1. Mutassuk meg, hogy ha $a_1,a_2,a_3,\ldots$ tetszőleges pozitív számok, akkor

$$\sum_{i=1}^{\infty} 1/a_i=\infty \qquad \text{és} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} a_i/i^2=\infty$$

közül legalább az egyik teljesül. (Pozitív $c_1,c_2,\ldots$ számok esetén $\sum_{i=1}^{\infty} c_i=\infty$ azt jelenti, hogy az $s_k=c_1+c_2+\ldots+c_k$ összegek k növekedésével minden határon túl nőnek.)

2. Vetítsük az $ABCD$ szabályos tetraédert merőlegesen egy a térben fekvő számegyenesre, és legyenek a csúcsok vetületei rendre az a, b, c, d valós számok. Fejezzük ki a tetraéder élhosszát a, b, c és d segítségével.

3. Egy nap egy méhraj egy különlegesen szép fa virágjairól gyűjtötte a mézet. Minden méhecske legfeljebb 100-szor látogatott el a fához, kettőnél többen sohasem voltak egyszerre ott, de bármelyik két méhecske találkozott valamikor egymással a fánál. Maximálisan hány méhecskéből állhat a méhraj?