# KEZDŐK

## I. kategória: Legfeljebb heti 3 órában matematikát tanuló középiskolai tanulók

### Első (iskolai) forduló

**1.** Egy osztályban a gyerekek kettesével ülnek, és a padtársak közül pontosan az egyiküknél van minden matek órán matematika feladatgyűjtemény. Másik jellegzetessége az osztálynak, hogy bármely két tanuló esetén van egy harmadik társuk, aki pontosan akkor hozza el a matematika feladatgyűjteményét, ha a két tanulótársa is.

Egyik nap begurult a matek tanár, és azt mondta: „ebben az osztályban nincs olyan tanuló, aki minden nap matematika feladatgyűjteménnyel jönne a matek órára".

Helyes volt-e ez a megjegyzése a tanárnak?

**2.** Be lehet-e osztani az
*a*) 1-től 2008-ig,
*b*) 1-től 2009-ig
terjedő egész számokat két csoportba úgy, hogy a két csoportban a számok összege ugyanannyi legyen?

**3.** Egy 26 fős osztály legutóbbi matematika dolgozatairól a következőket tudjuk:
– 20 tanulónak közepesnél nem jobban,
– 14-nek közepesnél nem gyengébben sikerült.
– A közepesnél jobbak dolgozatainak átlaga 4,33;
– a közepesnél gyengébbek dolgozatainak átlaga 1,83;
– nem hiányzott senki a dolgozat írásakor.
(Az átlagok két tizedes kerekítéssel értendők.)
Mennyi az osztályátlag?

**4.** Legyen az $ABC$ hegyesszögű háromszögben az $A$-ból induló magasság talppontja $T$, a háromszög köré írt kör középpontja $O$ és sugara $R$. Bizonyítsa be, hogy ha az $AT$ szakasz hossza $R$, akkor az $OT$ szakasz merőleges az $A$-ból induló szögfelezőre.

### Második forduló

**1.** Mely $x$ és $y$ egész számokra igaz, hogy $x^2 + yx = 36$ és $y^2 + yx = 45$?

**2.** Egy 8 cm oldalú négyzet síkjában lévő $P$ pont a négyzet mind a négy csúcsától legfeljebb 8 cm távolságra van. Igazolja, hogy $P$ a négyzet minden oldalától legalább 1 cm távolságra van!

**3.** Melyek azok a pozitív egész számok, amelyeknek pontosan négy (pozitív) osztója van és az osztóik összege 108?

**4.** Adott egy háromszög, melybe rajzolható három kör, melyek egymást kívülről érintik és mindegyik kör a háromszög oldalai közül pontosan kettőt érint. Mutassa meg, hogy a körök belső közös érintőegyenesei egy pontban metszik egymást!

**5.** Julcsi ebben a félévben matematikából csak négyes és ötös osztályzatot kapott. Négyesből 4 darabot és ötösből 5 darabot. Hányféle sorrendben kaphatta ezt a 9 darab osztályzatot, ha soha nem kapott egymás után kettő darabnál több négyes osztályzatot?

### Harmadik (döntő) forduló

**1.** Egy 1 cm élhosszúságú, átlátszó és fekete kockákból egy 5 cm élhosszúságú nagyobb kockát építettünk. Legalább hány fekete kockát használtunk fel, ha a nagy kocka mind elöl-, mind oldal-, mind felülnézetből feketének látszik?

**2.** Az $ABC$ egységnyi területű derékszögű háromszög minden oldalára kifelé egy-egy négyzetet rajzolunk. Ezek középpontja $X$, $Y$ és $Z$. Bizonyítsa be, hogy az $XYZ$ háromszög területe legalább 2 egység!

**3.** Mely $p$, $q$ és $r$ prímszámokra teljesül, hogy $p^2 + q^2 + r^2 = 10\,235$?

## II. kategória: Több, mint heti 3 órában matematikát tanuló (nem speciális tantervű) középiskolai tanulók

### Első (iskolai) forduló

Megegyezik az I. kategória első fordulós feladatsorával.

### Második forduló

Megegyezik az I. kategória második fordulós feladatsorával.

### Harmadik (döntő) forduló

**1.** Egy háromszög csúcsain át összesen 2009 db egyenest fektetünk úgy, hogy minden egyenes kettévágja a háromszöget, és a csúcsokon kívül egyetlen metszésponton sem megy át kettőnél több egyenes. Mutassa meg, hogy a háromszögben keletkezett tartományok száma kevesebb, mint $1{,}4 \cdot 10^6$.

**2.** Három szomszédos pozitív egész szám mindegyike két különböző prímszám szorzata. Vegyük az így adott hat prímszám közül a két legkisebbet és a két legnagyobbat. Lehet-e ennek a négy prímszámnak az összege 2009?

**3.** Az $ABC$ egységnyi területű derékszögű háromszög minden oldalára kifelé egy-egy négyzetet rajzolunk. Ezek középpontja $X$, $Y$ és $Z$. Bizonyítsa be, hogy az $XYZ$ háromszög területe legalább 2 egység!

## III. kategória: Speciális tantervű osztályokban tanulók

### Első (iskolai) forduló

Megegyezik az I. kategória második fordulós feladatsorával.

### Második (döntő) forduló

**1.** A tízes számrendszerben adott $A_n$ és $B$ számok a következők: $A_n = 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}$, ahol az emeletes hatványban összesen $n$ db 2-es van; $B = 2^{222\ldots2}$, ahol a kitevőben 2009 db 2-es áll. Mely $n$ pozitív egész számokra lesz $A_n > B^B$?

**2.** Adott egy $k$ kör és a belsejében két pont $A$ és $B$. Szerkesszen a $k$ körön olyan $C$ pontot, amelyre az $ACB$ szög maximális!

**3.** Egy háromszög csúcsain át összesen 2009 db egyenest fektetünk úgy, hogy minden egyenes kettévágja a háromszöget és a csúcsokon kívül egyetlen metszésponton sem megy át kettőnél több egyenes. Adjon minél jobb felső becslést a háromszögben keletkező tartományok számára!

# HALADÓK

## I. kategória: Legfeljebb heti 3 órában matematikát tanuló középiskolai tanulók

### Első (iskolai) forduló

**1.** Az $ABCD$ négyzetben felvettünk egy $P$ pontot úgy, hogy az egyenlő, 10 centiméteres távolságra van a $DC$ oldal $F$ felezőpontjától és az $A$ és $B$ pontoktól.
Mekkora az $ABCD$ négyzet területe?

**2.** Határozzuk meg mindazokat az $x$, $y$, $m$ számhármasokat, amelyekre

$$-2x + 3y = 2m \qquad \text{és} \qquad x - 5y = -11$$

egyszerre teljesül, továbbá $x$ negatív egész szám, $y$ pozitív egész szám, $m$ pedig valós szám!

**3.** Van négy ember, akiknek a keresztnevei sorra Ádám, Balázs, Csaba, Dávid. E négy férfinak a családi nevei is Ádám, Balázs, Csaba és Dávid, nem feltétlenül ilyen sorrendben. Az alábbiakat tudjuk róluk:

i. Minden egyes ember családi neve különbözik a keresztnevétől.

ii. Csaba családi neve nem Ádám.

iii. Balázs családi neve megegyezik annak az embernek a keresztnevével, akinek a családi neve megegyezik annak az embernek a keresztnevével, akinek a családi neve Dávid.

Mi a négy ember teljes neve?

**4.** Mely pozitív egészekből álló $(a, b, c)$ számhármas elégíti ki az alábbi feltételeket?

$$a + b = c^3,$$
$$a + b + c = 130,$$
$$(a - b) \text{ osztható 19-cel.}$$

**5.** Színes kockákat készítünk a következő szabályok szerint:

(1) A kocka mindegyik lapját az egyik átlóval két háromszögre bontjuk úgy, hogy minden megrajzolt átló mindegyik végpontjához másik két ilyen átló csatlakozzék!

(2) Az azonos lapokon található háromszögek különböző színűek legyenek!

(3) Az azonos élek mentén csatlakozó háromszögek ugyanolyan színűek legyenek!

Hányféle kockát készíthetünk így, ha hat színt használhatunk fel a színezéshez?
(Nem tekintünk különbözőnek két kockát, ha elforgatással egymásba vihetők!)

## Második forduló

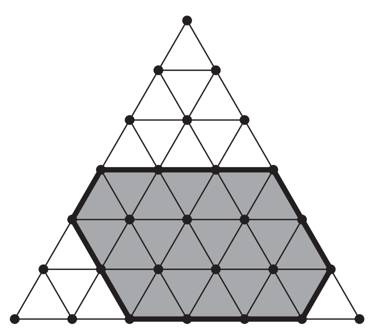
**1.** Tetszőleges számú 2 egység és 5 egység oldalú négyzetlapunk van. Ki lehet-e közülük 2009 darabot választani úgy, hogy belőlük hézagmentesen és átfedés nélkül négyzetet lehessen kirakni?

**2.** Legyenek $a$ és $b$ 2-nél nagyobb valós számok. Bizonyítsuk be, hogy

$$9a + 8b - 6ab < 10.$$

**3.** Az $ABC$ háromszög beírt köre az $AB$, $BC$, $CA$ oldalakat rendre az $F$, $D$, $E$ pontokban érinti. Az $AFE$, $BDF$ és $CED$ háromszögek beírt körének középpontja rendre $A_1$, $B_1$ és $C_1$.
Bizonyítsuk be, hogy $A_1$, $B_1$ és $C_1$ rajta vannak az $ABC$ beírt körén!

**4.** Egy szabályos háromszög oldalának hossza legyen kettőnél nagyobb természetes szám. A szabályos háromszög – az ábrán látható módon – felbontható egységoldalú szabályos háromszögekre. Az eredeti háromszög csúcsainál egy-egy egész oldalhosszúságú szabályos háromszöget levágva olyan hatszöget kapunk, amelynek oldalai egész hosszúságúak, szögei pedig egyenlők. Nevezzük egy ilyen hatszög *méretének* az őt alkotó egységoldalú szabályos háromszögek számát. (Az ábrán látható hatszög mérete ezek szerint 22.)



$a$) Hány különböző – nem egybevágó – hatszög készíthető a fenti módszerrel, ha az eredeti háromszög oldalainak hossza 6 egység?
$b$) Mekkora az a legkisebb egész oldalhosszúságú szabályos háromszög, amiből kivágható 2009 *méretű* hatszög?

## Harmadik (döntő) forduló

**1.** Egy gazda az állatainak táplálásához a szomszédos gazdaságtól kétféle takarmány-keveréket vásárolhat. Az első fajta zsákonként 3000 Ft-ba kerül és ez 20 kg $A$ komponenst és 10 kg $B$ komponenst tartalmaz. A második fajta zsákonként 5000 Ft-ba kerül és ebben 10 kg $A$, 25 kg $B$ és 5 kg $C$ komponens van. A gazda rájött, hogy az állatok egészséges fejlődéséhez naponta legalább 90 kg $A$, 105 kg $B$ és 5 kg $C$ komponensre van szükség. Mennyit vásároljon az egyes takarmány-keverékekből naponként, hogy a legolcsóbban tudjon egészséges állatokat nevelni?

**2.** Melyek azok a pozitív egészekből álló különböző $(x; y; z; u)$ számnégyesek, amelyek kielégítik az

$$\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}=u$$

egyenletet?

**3.** Egy $ABC$ háromszög $AB$ oldalának felezőpontja $F$. Megrajzoltuk $F$-en keresztül azt az $e$ egyenest, ami felezi a háromszög kerületét. (Tehát mindkét $e$ által meghatározott félsíkba a kerület fele esik.)

Bizonyítsuk be, hogy az $e$ egyenes párhuzamos a $C$ csúcsból induló belső szögfelezővel!

## II. kategória: Több, mint heti 3 órában matematikát tanuló (nem speciális tantervű) középiskolai tanulók

### Első (iskolai) forduló

**1.** Határozzuk meg azokat az egész számokat, amelyekre az $x^2+32x+2264$ polinom helyettesítési értéke egyenlő egy prímszám négyzetével!

**2.** Tekintsük az $1+2+3+4+\ldots+2008$ összeget! Az összeg tetszőleges számú „+” előjelét „−”-ra változtathatjuk.
*a*) Bizonyítsuk be, hogy az előjelváltásokkal elérhető a 2008 értékű összeg.
*b*) Igazoljuk, hogy a 2009 értékű összeg nem állítható elő előjelváltásokkal.

**3.** A $T$ területű szabályos háromszög oldalaival párhuzamos egyenesek felezik a háromszög területét. A három egyenes által közrefogott háromszög területe $t$. Melyik két szomszédos egész szám közé esik $\dfrac{T}{t}$ értéke?

**4.** Azt mondjuk, hogy egy sorozat *Fibonacci-típusú,* ha tagjai pozitív egészek és a harmadik tagtól kezdve minden eleme az előző kettő összege. Például $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$, vagy $3, 1, 4, 5, 9, 14, \ldots$.

Hány olyan Fibonacci-típusú sorozat van, amelynek 8. eleme 2008?

**5.** Tudjuk, hogy

$$\sqrt{44-8}=6,$$
$$\sqrt{4444-88}=66,$$
$$\sqrt{444\,444-888}=666.$$

Ha $n$ pozitív egész szám, akkor bizonyítsuk be, hogy az $A=\sqrt{\underbrace{444\ldots4}_{2n\text{-szer}}-\underbrace{888\ldots8}_{n\text{-szer}}}$ szám természetes szám!

### Második forduló

**1.** Barbara ma ünnepelte születésnapját. Meglepve tapasztalta, hogy ha összeadja születési évének számjegyeit, akkor éppen azt kapja meg, hogy hány éves. Mikor született Barbara?

**2.** 24 darab egységnyi oldalú szabályos háromszöglap maradéktalan felhasználásával hány darab egybevágóság erejéig különböző konvex négyszög rakható ki hézagmentesen és átfedés nélkül?

**3.** Legyen $n$ tetszőleges természetes szám. Lehet-e az

$$x=\frac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$

szám egészrésze négyzetszám?

(Az $x$ szám egészrészét $[x]$ jelöli, ahol $[x]$ az $x$ számnál nem nagyobb legnagyobb egész szám.)

**4.** Legyenek az $ABC$ hegyesszögű háromszög magasságvonalai $AT_a$, $BT_b$, $CT_c$. Bizonyítsuk be, hogy az $AT_bT_c$, $BT_aT_c$ és $CT_bT_a$ háromszögek magasságpontjai által meghatározott háromszög egybevágó a $T_aT_bT_c$ háromszöggel!

### Harmadik (döntő) forduló

**1.** Legyen $p$ egy tetszőleges természetes szám. Határozzuk meg az

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=p$$

egyenlet összes nullától különböző és páronként relatív prím $x$, $y$, $z$ egészekből álló megoldását!

**2.** Az $ABC$ hegyesszögű háromszög oldalai egész szám egység hosszúak. A háromszögbe legalább két olyan egyenlő kerületű téglalap is írható, amelyeknek két csúcsa az $AB$ oldal, másik két csúcsa pedig a másik két oldal egy-egy pontja. Bizonyítsuk be, hogy az $ABC$ háromszög területének kétszerese négyzetszám.

**3.** Legyen $k$ természetes szám. A $36k^2+268k+2009$-et szeretnénk $n$ darab páratlan négyzetszám összegeként felírni.
*a*) Bizonyítsuk be, hogy ez $2\le n\le 8$ esetén nem lehetséges.
*b*) Mutassuk meg, hogy $n=9$-re mindig van megoldás.

## III. kategória: Speciális tantervű osztályokban tanulók

### Első (iskolai) forduló

**1.** Az $(a_n)$ számsorozatra $n\ge 1$ esetén $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+3)$ teljesül. Mi lehet $a_1$ lehető legkisebb értéke, ha a sorozat első 2009 darab tagja pozitív egész szám, az összes többi tagja pedig nem az?

**2.** Egy egységnégyzetbe írt téglalap csúcsai a négyzet különböző oldalainak belső pontjai. Bizonyítsuk be, hogy ha a téglalap területe legalább $\dfrac{1}{2}$, akkor a téglalap négyzet.

**3.** Definiáljuk az $f$ függvényt a pozitív egészek körében a következőképpen:

$$f(1)=2009 \quad \text{és}$$
$$f(1)+f(2)+\ldots+f(n)=n^2f(n).$$

Adjuk meg $f(2009)$ pontos értékét!

**4.** Az $ABC$ háromszög beírt köre az $AB$, $BC$, $CA$ oldalakat rendre az $F$, $D$, $E$ pontokban érinti. Az $AFE$, $BDF$ és $CED$ háromszögek beírt körének középpontja rendre $A_1$, $B_1$ és $C_1$.
*a*) Bizonyítsuk be, hogy $A_1$, $B_1$ és $C_1$ rajta vannak az $ABC$ beírt körén!
*b*) Bizonyítsuk be, hogy az $A_1D$, $B_1E$ és $C_1F$ szakaszok átmennek az $A_1B_1C_1$ háromszög magasságpontján!

**5.** Van 25, nem feltétlenül azonos tömegű csokidarabunk. Egyetlen darabot megfelelően kettévágva el tudjuk-e osztani a csokoládét két gyerek között úgy, hogy darabra és tömegre is azonos mennyiséget kapjanak?

### Második (döntő) forduló

**1.** A minden valós számra értelmezett $f(x)$ függvényre $f(x+1)+3\cdot f(-x)=|x|$ teljesül. Adjuk meg $f(x)$ zérushelyeit!

**2.** Egy körlapot $n$ darab körcikkre osztottunk, a cikkeket 1-től $n$-ig számozva, ahol $n\ge 2$. Hányféleképpen színezhetők ki a számozott körcikkek úgy, hogy a szomszédos körcikkek színe különböző legyen, ha legfeljebb három adott színt használhatunk a színezéshez?
(Egy körcikk egyszínű a színezés során.)

**3.** Adott egy $ABC$ háromszög és egy $e$ egyenes a háromszög síkjában. A háromszög csúcsainak merőleges vetületei az $e$ egyenesen $A'$, $B'$ és $C'$. Az $A'$ ponton át húzott és $BC$-re merőleges egyenes $m_A$, a $B'$-n át haladó és $AC$-re merőleges egyenes $m_B$, végül a $C'$-n át húzott $AB$-re merőleges egyenes $m_C$.
Bizonyítsuk be, hogy az $m_A$, $m_B$ és $m_C$ egyenesek egy ponton mennek át!