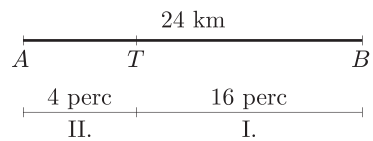
I. rész

1. *Az egymástól* 24 km *távolságra lévő* A *és* B *városból egyszerre indul egymással szembe két gépkocsi. Találkozásuk után* 4 *perccel az a gépkocsi, amelyik a* B *városból indult, megérkezik az* A *városba, a másik pedig a találkozás után* 16 *perccel a* B *városba. Határozzuk meg a gépkocsik sebességét.* (*11 pont*)

Megoldás.



Foglaljuk adatainkat táblázatba (a zárójelben lévő számok a táblázat kitöltésének sorrendjét mutatják):

	út (km)	sebesség (km/óra)	idő (óra)
I. AT	$\frac{1}{15}y$ (7)	x (9)	$\frac{1}{15}\cdot\frac{y}{x}$ találkozás előtt (11)
II. BT	$\frac{4}{15}x$ (8)	y (10)	$\frac{4}{15}\cdot\frac{x}{y}$ találkozás előtt (12)
I. TB	$\frac{4}{15}x$ (5)	x (3)	$\frac{16}{60}$ találkozás után (1)
II. TA	$\frac{1}{15}y$ (6)	y (4)	$\frac{4}{60}$ találkozás után (2)

Mivel a két autó egyszerre indult, azért a találkozásig eltelt idők egyenlők:

$$\frac{1}{15}\cdot\frac{y}{x}=\frac{4}{15}\cdot\frac{x}{y}, \qquad \text{azaz} \qquad \left(\frac{y}{x}\right)^2=4.$$

Amiből $y=2x$, vagy $y=-2x$. Ez utóbbi nem felel meg a szöveg tartalmának, ezért nem adhat megoldást.

Mivel a teljes út 24 km, így $\frac{1}{15}\cdot 2x+\frac{4}{15}x=24$, amiből $x=60$, s ekkor $y=120$.

Tehát az A városból induló autó sebessége 60 km/óra, a B városból indulóé 120 km/óra.

2. a) 1000 *almát úgy akarunk* k $(k\ge 2)$ *tanuló között szétosztani, hogy az első tanuló kapjon* x *almát és minden további tanuló rendre* 3*-mal kevesebbet mindaddig, míg az* 1000 *almát maradéktalanul ki nem osztottuk.*

Hány tanulóról lehet szó? Hány alma jut ekkor az utolsó tanulónak?

b) *Legközelebb* 16 *ember között az* 1000 *almát úgy szeretnénk elosztani, hogy az első* 11 *embernek egyforma számú almát adjunk, de ezt követően* 50%*-kal mindig többet, mint az előzőnek. Ekkor a végén marad még* 15 *alma. Az egyes emberek által kapott almák számát feljegyezzük, s így kapunk* 16 *adatot.*

Mennyi az így kapott adatok átlaga és módusza? (*12 pont*)

Megoldás. a) A jelöléseket használva:

$$S_k=x+(x-3)+(x-6)+\ldots+\big[x-3(k-1)\big]=\frac{2x-3(k-1)}{2}\cdot k=1000,$$

azaz $\big[2x-3(k-1)\big]\cdot k=2^4\cdot 5^3$.

Ha k páros, akkor $2x-3(k-1)$ páratlan és viszont. Ezt figyelembe véve a törzstényezős szorzatalakok közül a feladat feltételeinek csak a következők tesznek eleget:

$$\begin{gathered}400\cdot 5,\ \text{ekkor}\ k=5;\ \ x=206,\\ 80\cdot 25,\ \text{ekkor}\ k=25;\ x=76,\\ 125\cdot 16,\ \text{ekkor}\ k=16;\ x=85.\end{gathered}$$

A következő lehetőségeket kaptuk: 5 tanuló esetén az utolsó 194, 25 tanuló esetén az utolsó 4, és 16 tanuló esetén az utolsó 40 almát kap.

b) Az adatok átlagának kiszámításához nem szükséges az összes adatot ismernünk. Tudjuk ugyanis a 16 adat összegét, ami 985. Ekkor az átlag: $\frac{985}{16}=61{,}5625$.

A 16 adat utolsó 6 tagja egy mértani sorozat egymást követő hat eleme lesz, ahol $q=1{,}5$ és az első elem ismeretlen, jelöljük ezt a-val.

Felírható a következő egyenlet: $10a + a \cdot \dfrac{1{,}5^6 - 1}{1{,}5 - 1} + 15 = 1000$. Ebből $a = 32$ adódik.

Ez a legtöbbször feljegyzett adat, így a minta módusza 32.

3. *Oldjuk meg a következő egyenleteket:*

a) $\dfrac{x^2+2x+1}{\sqrt{(x+1)^2}} + x + 1 = 0$;

b) $10^{\lg 3x} = 2x - 3$;

c) $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+5} = \sqrt{x^2+4x-5}$;

d) $\sqrt{1-\sin^2 x} \cdot \operatorname{tg} x = \sin x$. (*14 pont*)

Megoldás. *a)* Az egyenlet nincs értelmezve, ha $x = -1$. Mivel $\sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$, azért az egyenletet a következő alakban írjuk:

$$\frac{(x+1)^2}{|x+1|} = -(x+1).$$

Mivel $x \neq -1$, azért $\dfrac{x+1}{|x+1|} = -1$. Ezek szerint $|x+1|$ az $x+1$ ellentettjével egyenlő, ezért $x + 1 < 0$.

Vagyis $x < -1$ valós számok az egyenlet megoldásai.

b) Az egyenlet bal oldala csak akkor értelmezhető, ha $x > 0$. Ekkor $3x = 2x - 3$. Így $x = -3$, ami nem eleme az értelmezési tartománynak. Az egyenletnek nincs megoldása.

c) Az egyenlet csak akkor értelmezhető, ha $x \geq 1$ (a négyzetgyökök miatt). Ekkor az egyenlet azonosság, vagyis a megoldása: $x \geq 1$ valós számok.

d) Mivel $\sqrt{1-\sin^2 x} = |\cos x|$, azért az egyenlet

$$\frac{\sin x}{\cos x}|\cos x| = \sin x$$

alakban írható. Két eset van.

I. $\sin x = 0$. Ekkor $x_1 = k_1\pi$, akol $k_1 \in \mathbb{Z}$.

II. $|\cos x| = \cos x$. Mivel $\cos x \neq 0$, így $\cos x > 0$. Ekkor

$$-\frac{\pi}{2} + 2k_2\pi < x_2 < \frac{\pi}{2} + 2k_2\pi, \qquad \text{ahol} \qquad k_2 \in \mathbb{Z}.$$

4. *Egy paralelogramma egyik átlójának hossza egy bizonyos szög szinuszával, a másik ugyanennek a szögnek a koszinuszával, míg a rövidebbik oldala a szög kétszeresének szinuszával egyenlő. A két átló által bezárt szög* $60°$.

Számoljuk ki a paralelogramma oldalhosszainak pontos értékét. (*14 pont*)

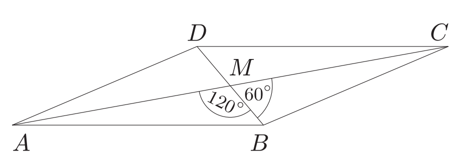
Megoldás. Mivel a paralelogramma átlói felezik egymást, azért az MBC háromszögben $MB = \dfrac{\sin\alpha}{2}$ és $MC = \dfrac{\cos\alpha}{2}$. A rövidebbik oldala a paralelogrammának BC, így $BC = \sin 2\alpha$. Az MBC háromszögre felírjuk a koszinusztételt, majd rendezzük a kapott egyenletet:

$$\left(\frac{\sin\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\cos\alpha}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\sin\alpha}{2} \cdot \frac{\cos\alpha}{2} \cdot \cos 60° = \sin^2 2\alpha,$$

$$\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{4} - \frac{2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{4} \cdot \frac{1}{2} = \sin^2 2\alpha,$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \cdot \sin 2\alpha = \sin^2 2\alpha, \qquad 0 = \sin^2 2\alpha + \frac{1}{8} \cdot \sin 2\alpha - \frac{1}{4}.$$

A $\sin 2\alpha$-ra kapott két gyök egyike negatív, így $BC = \sin 2\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{65}}{16} \approx 0{,}44$.



Felírjuk a koszinusz-tételt az AMB háromszögre:

$$AB^2 = \left(\frac{\sin\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\cos\alpha}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{\sin\alpha}{2}\cdot\frac{\cos\alpha}{2}\cdot\cos 120^\circ =$$

$$= \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{4} + \frac{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{4}\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cdot\sin 2\alpha = \frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cdot\frac{-1+\sqrt{65}}{16} = \frac{32-1+\sqrt{65}}{128} = \frac{31+\sqrt{65}}{128}.$$

Vagyis $AB = \sqrt{\dfrac{31+\sqrt{65}}{128}} \approx 0{,}55$.

II. rész

5. *Egy biológushallgató két tárgylemez közt lévő vizes közeget figyel mikroszkóppal, amely egy* 0,9 mm *oldalú négyzet alakú területet foglal el. Ezen négyzet oldalainak harmadával megegyező oldalhosszúságú, 9 négyzetből álló négyzethálót vetít rá a látótérre, amely sakktáblaszerűen szürkével és fehérrel színezett úgy, hogy a bal alsó sarok szürke. Legyen két eseményünk az, hogy amikor először a mikroszkópba néz, akkor egy pontszerű baktériumot*

A: fehér négyzetben lát.

B: a közeg négyzetének bal oldalához közelebb látja, mint az alsó oldalához.

a) Számítsuk ki a $P(A)$, $P(B)$, $P(\overline{A}\cdot B)$ valószínűségeket.

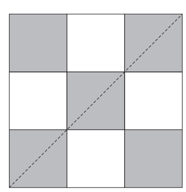
b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy 0,01 mm *sugarú gömb alakú porszemet úgy pillant meg, mintha a porszemnek lenne valamelyik szürke négyzettel közös pontja? (A porszemet a mikroszkópban egy* 0,01 mm *sugarú körlapnak látjuk, és az elhelyezkedése véletlenszerű a megfigyelt közegben.)* *(16 pont)*

Megoldás. A pontszerű baktérium az $a = 0{,}9$ mm oldalú négyzet alakú vizes közeg akármelyik pontjában előfordulhat, továbbá érvényes a megfigyelésre a geometriai valószínűség minden feltétele.

a) Az A esemény akkor következik be, ha a baktérium a négy fehér négyzet valamelyikében van, ezért

$$P(A) = \frac{4}{9}.$$

A B eseménynél a szaggatott átló feletti részben látható a baktérium, ezért $P(B) = 0{,}5$.



A $\overline{A}\cdot B$ eseménynél az átló feletti részbe eső szürke területek egyikében lesz a baktérium, ezért

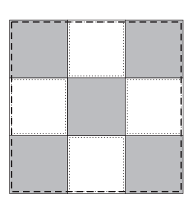
$$P(\overline{A}\cdot B) = \frac{\left(\frac{a}{3}\right)^2 + 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{3}\right)^2}{a^2} = \frac{5}{18}.$$

b) A porszem megfigyelésekor a porszem középpontja véletlenszerűen, de egy $b = 0{,}9 - 2\cdot 0{,}01 = 0{,}88$ mm oldalhosszúságú négyzetben fordulhat elő, hiszen a „szélső" helyzeténél érintkezik a közeg négyzetének oldalával, ezért ekkor a középpontja az oldalaktól 0,01 mm távol van.

A kérdezett esemény bekövetkezésekor valamelyik szürke négyzettel érintkezve a „szélső" helyzetnél a középpont ezek oldalától 0,01 mm-re van, ezért a négy fehér négyzetben kijelölt

$$c = \frac{0{,}9}{3} - 2\cdot 0{,}01 = 0{,}28 \text{ mm}$$

oldalú négyzet egyikében sem lehet a porszem középpontja.



Így a keresett valószínűség:

$$P=\frac{b^2-4\cdot c^2}{b^2}=1-\frac{4\cdot c^2}{b^2}=1-\frac{4\cdot 0{,}28^2}{0{,}88^2}\approx 0{,}595.$$

6. *a) Tekintsük azokat az ötjegyű számokat, amelyekre igaz, hogy utolsó három számjegyük különböző, ezen számjegyek összege 5 és közülük egyik se prímszám. Mennyi ezek közül a 8-cal oszthatók összege?*

b) Tekintsük az összes olyan n pozitív egész számot, amelyre $n!+3$ négyzetszám. Hány ilyen négyzetszám van? *(16 pont)*

Megoldás. *a)* A feltételeket figyelembe véve a három utolsó számjegy csak a 0, 1, 4 lehet. Ezek hat lehetséges sorrendjéből csak a 104 a megfelelő a 8-cal való oszthatóság miatt. Az első két számjegy helyére kilencven kétjegyű szám kerülhet. A legkisebb jó ötjegyű az $a_1=10\,104$ és minden további $d=1000$-rel több. A 90 elemű számtani sorozat összege:

$$S_{90}=\frac{90}{2}[2\cdot 10\,104+89\cdot 1000]=4\,914\,360.$$

b) Ha $n\ge 5$, akkor $n!$ utolsó számjegye 0, így $n!+3$ utolsó számjegye 3. A négyzetszámok viszont nem végződhetnek 3-ra. Ebből adódóan csak $n=4$-ig kell vizsgálódni. Ezekből négyzetszámot ad az $n=1$ és az $n=3$. Vagyis két megfelelő négyzetszámot találtunk, a 4-et és a 9-et.

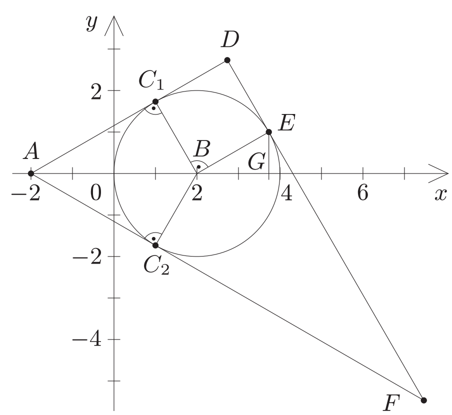
7. *Az $A(-2;0)$ és a $B(2;0)$ pont egy derékszögű háromszög átfogójának két végpontja.*

a) Határozzuk meg a harmadik csúcspont koordinátáit, ha az A csúccsal szemközti befogó hossza 2.

b) A B középpontú 2 sugarú kör egy olyan háromszög beírható köre, amelynek egyik csúcspontja az A pont, és az A ponttal szemközti oldal az $E\big(2+\sqrt{3};1\big)$ pontban érinti a kört. Határozzuk meg e háromszög másik két csúcspontjának koordinátáit.

c) Mekkorák a keresett háromszög szögei? *(16 pont)*

Megoldás. Készítsünk *ábrát.*



a) Két ilyen háromszög van. Ezek egymás tükörképei az x tengelyre vonatkozóan. Mivel $AB=2\cdot BC_1$, azért $C_1AB\sphericalangle=30^\circ$, azaz $AC_1=2\sqrt{3}$, így $C_1\big(1;\sqrt{3}\big)$ és $C_2\big(1;-\sqrt{3}\big)$.

b) Az $(x-2)^2+y^2=4$ egyenletű kört érintő háromszög két oldalának egyenese az A pontból a körhöz húzott két érintő. Az E pont rajta van a körön, mert koordinátái kielégítik a kör egyenletét. A harmadik oldal egyenese a kör E pontjához tartozó érintő lesz. Az A ponton áthaladó érintők egyenletéhez felírjuk a két egyenes irányvektorát: $\overrightarrow{AC_1}\big(3;\sqrt{3}\big)$, $\overrightarrow{AC_2}\big(3;-\sqrt{3}\big)$.

A két oldal egyenesének egyenlete:

$$\sqrt{3}x-3y=-2\sqrt{3}\quad\text{és}\quad\sqrt{3}x+3y=-2\sqrt{3}.$$

Az E ponthoz tartozó érintő egyenletéhez felírjuk az egyenes normálvektorát: $\overrightarrow{BE}\big(\sqrt{3};1\big)$. Az egyenes egyenlete: $\sqrt{3}x+y=2\sqrt{3}+4$.

A metszéspontokat megkapjuk, ha kiszámítjuk ennek az egyenesnek a másik két egyenessel való metszéspontját.

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{3}x-3y&=-2\sqrt{3},\\ \sqrt{3}x+y&=2\sqrt{3}+4.\end{aligned}\right\}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $x_1=1+\sqrt{3}$, $y_1=1+\sqrt{3}$.

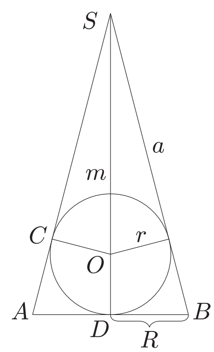
$$\left.\begin{aligned}\sqrt{3}x+3y&=-2\sqrt{3},\\ \sqrt{3}x+y&=2\sqrt{3}+4.\end{aligned}\right\}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $x_2 = 4 + 2\sqrt{3}$, $y_2 = -2 - 2\sqrt{3}$.

A keresett pontok koordinátái: $D\bigl(1+\sqrt{3}; 1+\sqrt{3}\bigr)$, $F\bigl(4+2\sqrt{3}; -2-2\sqrt{3}\bigr)$.

c) Belátható, hogy a BC_1DE négyszög négyzet, tehát a D csúcsnál derékszög van, az A csúcsnál levő szög $60°$, az F csúcsnál levő pedig $30°$.

8. *Egy egyenes körkúp felszínét, térfogatát és a beírt gömbjének felszínét jelölje sorra A, V és G. Igazoljuk, hogy $A^2G = 36\pi \cdot V^2$.* (*16 pont*)



Megoldás. A kúp alapkörének sugara R, magassága m, alkotója a és a beírt gömb sugara r, melyekkel:

$$A = \pi R(R+a), \qquad V = \frac{\pi R^2 m}{3}, \qquad G = 4r^2\pi.$$

A kúp tengelyén keresztül egy síkkal elmetszve a testeket, az ABS egyenlő szárú háromszögben $OCS\triangle \sim ADS\triangle$, mert 2–2 szögük megegyezik. Így $AD = R$, $DS = m$ és $OC = r$ miatt $\dfrac{r}{R} = \dfrac{m-r}{a}$, melyből

$$ar = Rm - Rr, \qquad \text{így } m = \frac{r(R+a)}{R}.$$

Tehát

$$36\pi \cdot V^2 = 36\pi \cdot \frac{\pi^2 R^4 m^2}{9} = \frac{4\pi^3 R^4 r^2 (R+a)^2}{R^2} = \pi^2 R^2 (R+a)^2 \cdot 4r^2\pi = A^2 G.$$

9. *Legyen adva a valós számokon értelmezett $f(x) = x - \dfrac{2}{3}x^3$ függvény.*

a) *A $[-2; 1]$ intervallum mely x értékei esetén veszi fel ez a függvény a maximális, illetve a minimális értékét? Mekkorák ezek az értékek?*

b) *Ezen az intervallumon hol lesz a grafikonhoz húzott érintő párhuzamos a $g(x) = -3x + 2007$ függvény grafikonjával?*

c) *Mi lehet a $h(x)$ függvény hozzárendelési szabálya, ha*

$$h\bigl(f(x)\bigr) = \sqrt[3]{x - \frac{2}{3}x^3}\ ?$$

Határozzuk meg az $f\bigl(h(x)\bigr)$ összetett függvényt. (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Az adott folytonos és mindenütt differenciálható függvény egy véges zárt intervallumon a szélsőértékeit az intervallum végpontjaiban vagy a derivált zérushelyein veheti fel. Ezeket a helyeket kell megvizsgálni. $f'(x) = 1 - 2x^2$.

$f'(x) = 0$, ha $x_{1,2} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (itt lehetnek az intervallum belső pontjaiban szélsőértékek). Meg kell vizsgálni a derivált előjeleit ezen értékek előtt és után.

	$-2 \le x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$	$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} < x \le 1$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\downarrow$	min	$\uparrow$	max	$\downarrow$
$f(x)$ értéke		$-\frac{\sqrt{2}}{3}$		$\frac{\sqrt{2}}{3}$	

Tehát a derivált zérushelyein $\left(x_{1,2} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ a függvénynek lokális szélsőértékei vannak. Meg kell még vizsgálni az $x = -2$ és az $x = 1$ helyeken is a függvényértékeket: $f(-2) = \dfrac{10}{3}$ és $f(1) = \dfrac{1}{3}$.

Összevetve ezeket az értékeket a táblázatban szereplő értékekkel, a következő megállapításokra jutottunk: Az $f(x)$ függvény a $[-2; 1]$ intervallumon a maximumát az $x = -2$ helyen veszi fel:

$$f_{\max}(-2) = \frac{10}{3}.$$

Az $f(x)$ függvény a $[-2; 1]$ intervallumon a minimumát az $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ helyen veszi fel:

$$f_{\min}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

b) Az érintő meredekségét a deriváltfüggvény adott helyen vett helyettesítési értéke adja. Mivel $f'(x) = 1 - 2x^2$, azért keressük az $1 - 2x^2 = -3$ egyenlet megoldásait a vizsgált intervallumon. Ezek $x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$. Mivel az $x_4 = \sqrt{2}$ nem eleme a $[-2; 1]$ intervallumnak, ezért csak az $x_3 = -\sqrt{2}$ helyen lesz az érintő meredeksége -3.

c) Mivel a harmadik gyök alatt éppen az $f(x)$ függvény hozzárendelési szabálya szerepel, így $h(x) = \sqrt[3]{x}$.

Az így kapott $h(x)$ függvény segítségével képzett összetett függvény:

$$f\big(h(x)\big) = \sqrt[3]{x} - \frac{2}{3}\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = \sqrt[3]{x} - \frac{2}{3}x.$$