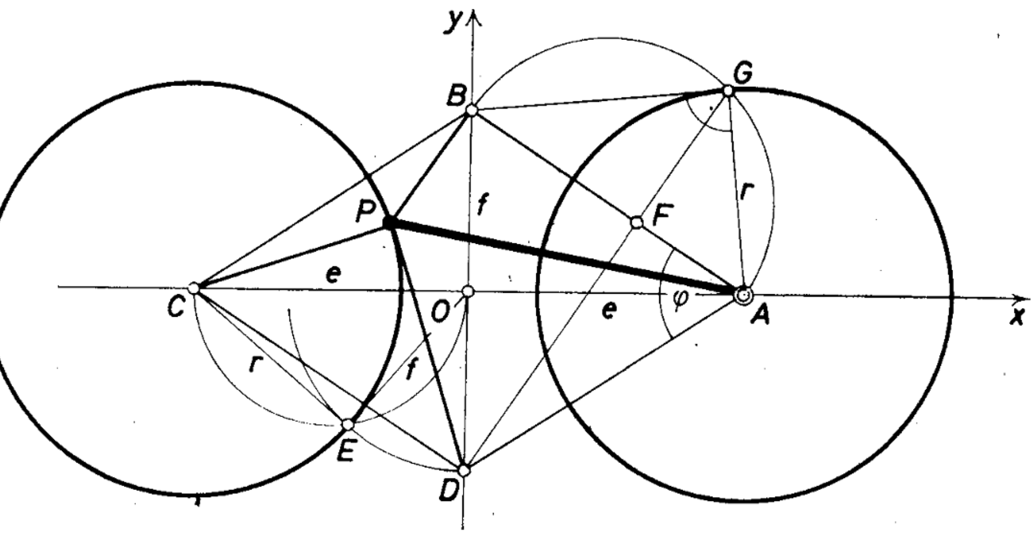
Jelöljük a rombusz átlóinak hosszát $2e$-vel, $2f$-fel, és válasszuk az átlók egyeneseit koordináta-rendszerünk tengelyeinek; így a rombusz csúcsainak koordinátái: $A(e{,}0)$, $B(0{,}f)$, $C(-e{,}0)$, $D(0{,}-f)$.



Adjuk a feladat szerinti kiemelt szerepet először az A csúcsnak, erre az esetre a mértani helynek mint e és f függvényének definícióját a következő egyenlet fejezi ki:

$$PA^2 = PB^2 + PC^2 + PD^2,$$

azaz

$$(x-e)^2 + y^2 = [x^2 + (y-f)^2] + [(x+e)^2 + y^2] + [x^2 + (x+f)^2],$$

ahol $P(x, y)$ a ponthalmaz tetszőleges pontja. Innen rendezés útján és mindjárt teljes négyzetté kiegészítéssel

(1) $$(x+e)^2 + y^2 = e^2 - f^2.$$

Ez $e^2 - f^2 > 0$, azaz $e > f(> 0)$ esetében annak a körnek az egyenlete, melynek középpontja C (az A-val szemben fekvő csúcs) és sugara $r = \sqrt{e^2 - f^2}$; ha $e = f$, akkor (1)-et csak a C pont elégíti ki, végül $0 < e < f$ esetében semmilyen pont sem elégíti ki kapott egyenletünket, a keresett halmaz üres.

Rögzítsük most az $e > f$ nagyságviszonyt, ekkor a feladat szerinti „valamelyik” csúcs szerepét sorra A-nak, B-nek, C-nek, D-nek adva, az 1. és a 3. esetben egy-egy kört kapunk C, ill. A körül a fönti r sugárral, a 2. és 4. eset viszont nem hoz járulékot a halmazhoz, tehát a mértani hely az A és C pontok – a rombusz hegyesszögű csúcsai – körüli r sugarú körök egyesítése.

Ha viszont speciálisan $e = f$, akkor a követelményt a négyzetté specializálódott rombusznak a négy csúcsa elégíti ki, más pont nem.

Lépéseink megfordíthatók, tehát a két kör pontjai valóban megfelelnek.

Egyszerű eljárást adhatunk a körök megszerkesztésére: legyen az OC félátló fölötti Thalész-kör és az O körüli, D-n átmenő kör egyik közös pontja E, itt átmegy a C körüli kör ($e < f$ esetén E nem jön létre).

Megjegyzés. Többen a rombusz egyik csúcsát vették origónak és az innen induló oldalak egyikét az egyik koordinátatengelynek. A számítás így kissé hosszabb, de az az érdekes eredmény adódik, hogy a két kör sugara $AB\sqrt{\cos DAB\sphericalangle}$, a szög természetesen szükséges volt a további két csúcs paraméterének.

Kiadódik persze ez a fenti eredményből is

$$e = AB \cos\frac{\varphi}{2}, \quad f = AB \sin\frac{\varphi}{2}$$

és

$$e^2 - f^2 = AB^2\left(\cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right) = AB^2 \cos\varphi.$$

És még egy szerkesztést is kiolvashatunk belőle: ha D vetülete az AB oldalra F (és $AF < AB$), akkor $r = AG$ az AB, AF szakaszpár mértani középarányosa, és G is pontja a mértani helynek.