

## I. rész

1. Mutassuk meg, hogy az  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  (ahol  $x \neq 0$  valós szám) hozzárendeléssel megadott függvényre minden  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$  valós számpár esetén teljesül, hogy

$$f(a) + f(b) + 2ab \cdot f(ab) = \frac{f(ab)}{f(a+b)}.$$

(11 pont)

**Megoldás.** Végezzük el a behelyettesítést a bal oldalon:

$$f(a) + f(b) + 2ab \cdot f(ab) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + 2ab \cdot \frac{1}{(ab)^2}.$$

Ezt tovább alakítva:

$$\frac{a^2 + b^2 + 2ab}{a^2b^2} = \frac{(a+b)^2}{a^2b^2} = \frac{\frac{1}{(ab)^2}}{\frac{1}{(a+b)^2}}.$$

Ami pontosan  $\frac{f(ab)}{f(a+b)}$ -vel egyenlő, és ezt szerettük volna igazolni.

2. A természetes számok sorozatából valamelyik számtól kezdve kiválasztjuk minden 12. számot addig, míg a kiválasztott számok összege 2010 lesz. A kiválasztott számok száma 10-nél több, de 100-nál kevesebb.

Melyik számot választottuk ki először és összesen hány darabot?

(12 pont)

**Megoldás.** Legyen az először kiválasztott szám  $x$  ( $x \in \mathbb{N}$ ), a kiválasztott számok darabszáma pedig  $k$  ( $10 < k < 100$  és  $k \in \mathbb{N}$ ).

Ezen számok összege:

$$\begin{aligned} x + (x+12) + \dots + (x + (k-1) \cdot 12) &= kx + 12(1 + \dots + (k-1)) = \\ &= kx + \frac{(k-1)k}{2} \cdot 12 = 2010. \end{aligned}$$

Vagyis:  $k(x + 6k - 6) = 2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$ . Ebből következik, hogy  $k$  10-nél nagyobb és 100-nál kisebb osztója a 2010-nek. A 2010-nek 3 db ilyen osztója van: 15; 30; 67.

Ha  $k = 15$ , akkor  $x = 134 - 84 = 50$ .

Ha  $k = 30$ , akkor  $x = 67 - 174 < 0$ .

Ha  $k = 67$ , akkor  $x = 30 - 396 < 0$ .

Tehát csak  $k = 15$  esetén kapunk megfelelő  $x$ -et. Az első kiválasztott szám az 50 és 15 db számot választottunk ki.

3. Mutassuk meg, hogy ha egy háromszög oldalaira teljesül az  $a^2 + b^2 > 5c^2$  egyenlőtlenség, akkor  $c$  a háromszög legkisebb oldala.

(14 pont)

**Megoldás.** A háromszög-egyenlőtlenség miatt:  $b + c > a$ , amiből következik:  $b^2 + 2bc + c^2 > a^2$ . Mindkét oldalhoz  $b^2$ -et adva:

$$2b^2 + 2bc + c^2 > a^2 + b^2 > 5c^2.$$

Ezt rendezve:  $b^2 + bc - 2c^2 > 0$ , amit így is írhatunk:  $b^2 - bc + 2bc - 2c^2 > 0$ , ennek szorzatalakja:  $(b-c)(b+2c) > 0$ . Mivel a második tényező pozitív, ezért az elsőnek is pozitívnak kell lennie, azaz  $b > c$ .

Hasonlóan belátható, hogy  $a > c$ , vagyis  $c$  valóban a háromszög legkisebb oldala.

4. Van-e megoldása a  $\sin^6 x + \sin^4 x + 2\sin^2 x + \cos^2 x = 4\sin^5 x$  egyenletnek a  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ -on? (14 pont)

**Megoldás.** Mindkét oldal négyzel való osztása, majd a bal oldalon  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$  helyettesítése után a kapott egyenlet bal oldalának minden tagja pozitív. A számtani és a mértani közepek közötti egyenlőtlenség miatt:

$$\sin^5 x = \frac{\sin^6 x + \sin^4 x + \sin^2 x + 1}{4} \geq \sqrt[4]{\sin^{12} x} = \sin^3 x.$$

Vagyis:  $\sin^3 x(\sin^2 x - 1) \geq 0$ .

Mivel a megadott intervallumon  $\sin x \in ]0; 1[$ , azért az első tényező pozitív, a második tényező negatív, azaz a szorzatuk negatív. Tehát ezen az intervallumon nincs megoldása az egyenletnek.

## II. rész

5. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget:

$$x^2 \cdot \log_4(5x^2 - 2x - 3) - x \cdot \log_{\frac{1}{4}}(5x^2 - 2x - 3) \leq x^2 + x. \quad (16 \text{ pont})$$

**Megoldás.** A logaritmus miatt:  $5x^2 - 2x - 3 > 0$ , amiből kapjuk, hogy  $x < -0,6$  vagy  $1 < x$ . Azonos alagra hozzuk a logaritmusokat; 0-ra rendezzük, majd szorzattá alakítjuk az egyenlőtlenséget:

$$x(x+1) \cdot [\log_4(5x^2 - 2x - 3) - 1] \leq 0.$$

A 4-es alapú logaritmus függvény szigorúan monoton nő, ezért a harmadik tényező akkor nemnegatív, ha

$$5x^2 - 2x - 3 \geq 4, \quad \text{azaz} \quad 5x^2 - 2x - 7 \geq 0.$$

Ebből kapjuk:  $x \leq -1$  vagy  $1,4 \leq x$ . A három tényező előjelét számegyenesen ábrázolva és a logaritmus miatt tett kikötésünket is figyelembe véve a megoldáshalmaz:  $\{-1\} \cup ]1; 1,4]$ .

6. A Stadion parkjában található „rúgófal” felső lyukába 10%, az alsóba 40% valószínűséggel talál be Márton.

a) Mindkét lyukra egyszer löve mennyi a valószínűsége, hogy

A: egyszer sem talál;

B: egyszer talál?

b) Hányszor kell az alsó lyukra lőnie, hogy több mint 95% valószínűséggel legalább egyszer beletaláljon?

c) Mennyi a valószínűsége, hogy háromszor az alsóra, majd háromszor a felsőre löve pontosan egyszer talál?

d) Krisztián észrevette, hogy Marci találati valószínűsége nem konstans. Találat után (az eredeti valószínűség)  $\frac{1}{10}$  részével nő, ha nem talál,  $\frac{1}{10}$  részével csökken az eredeti találati valószínűség. Marci kétszer lő az alsó lyukra. Mekkora a valószínűsége, hogy pontosan egyszer talál? (16 pont)

**Megoldás.** a) A:  $0,9 \cdot 0,6 = 0,54$ . B:  $0,9 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 0,6 = 0,42$ .

b) Legyen a rúgások száma  $n$ . Ekkor:  $1 - 0,6^n > 0,95$ . Az egyenlőtlenség megoldáshalmazából a legkisebb pozitív egész számot keressük. Elvégezzük a következő átalakításokat:

$$0,05 > 0,6^n, \quad \lg 0,05 > n \lg 0,6, \quad n > \frac{\lg 0,05}{\lg 0,6} \approx 5,86.$$

Vagyis legalább 6-szor kell lőnie.

c) 
$$\binom{3}{1} \cdot 0,4 \cdot 0,6^2 \cdot 0,9^3 + \binom{3}{1} \cdot 0,6^3 \cdot 0,1 \cdot 0,9^2 \approx 0,367.$$

A keresett valószínűség: kb. 0,367.

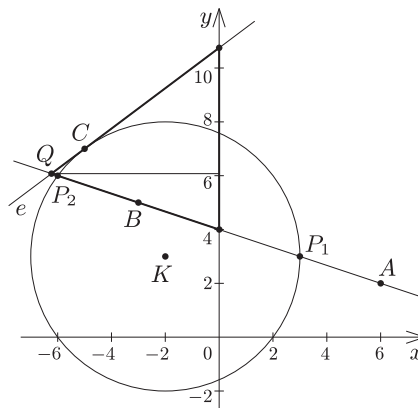
d)  $0,4 \cdot 0,56 + 0,6 \cdot 0,36 = 0,44$ . Ebben az esetben Marci 0,44 valószínűséggel talál be pontosan egyszer.

7. Adott a derékszögű koordinátarendszerben a  $K(-2; 3)$  középpontú  $r = 5$  sugarú kör és három pont:  $A(6; 2)$ ,  $B(-3; 5)$  és  $C(-5; y_0)$ , ahol  $y_0 > 0$ .

a) Mekkora a kör  $AB$  egyenesre illeszkedő húrjának hossza?

b) A  $C$  pont illeszkedik a körre. A kör  $C$ -ben húzott érintője legyen az  $e$  egyenes. Mekkora területű az a háromszög, amelyet az  $e$  egyenes, az  $y$  tengely és az  $AB$  egyenes fog közre? (16 pont)

**Megoldás.** a) Az  $AB$  egyenes egyenlete:  $y = -\frac{1}{3}x + 4$ . A kör egyenlete:  $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ .



Meghatározzuk a metszéspontjaik koordinátáit. Az  $y$  helyére  $-\frac{1}{3}x + 4$  behelyettesítésével a kör egyenletét a következő alakra rendezzük:

$$0 = \frac{10}{9}x^2 + \frac{10}{3}x - 20.$$

A másodfokú egyenlet megoldásai:  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = -6$ .

Vagyis a metszéspontok:  $P_1(3; 3)$ ,  $P_2(-6; 6)$ ;  $P_1P_2 = \sqrt{9^2 + 3^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$ . Az  $AB$  egyenesre illeszkedő húr hossza:  $3\sqrt{10}$ .

b) Mivel  $C$  illeszkedik a körre, azért  $(-5 + 2)^2 + (y_0 - 3)^2 = 25$ . Az  $y_0^2 - 6y_0 - 7 = 0$  másodfokú egyenletet kaptuk, melynek megoldásai:  $y_0 = 7$  vagy  $y_0 = -1$ . Mivel  $y_0 > 0$ , azért  $C(-5; 7)$ .

A  $C$ -beli  $e$  érintő egyenlete:  $3x - 4y = -43$ . Az  $AB$  egyenes egyenlete:  $\frac{1}{3}x + y = 4$ . A két egyenes  $Q$  metszéspontját kiszámítjuk:

$$Q\left(-\frac{81}{13}; \frac{79}{13}\right).$$

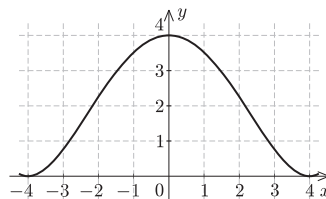
Az  $e$  érintő és az  $y$  tengely metszéspontja:  $R\left(0; \frac{43}{4}\right)$ . Az  $AB$  egyenes és az  $y$  tengely metszéspontja:  $S(0; 4)$ . Vagyis a háromszög  $RS$  oldalának hossza:  $RS = \frac{27}{4}$ . Ezen oldalhoz tartozó magasság hossza:

$$m = \frac{81}{13}.$$

A keresett terület:

$$t = \frac{\frac{27}{4} \cdot \frac{81}{13}}{2} = \frac{2187}{104} \approx 21,03.$$

8. Egy felújításra váró ház 8 m széles és 4 m magas oromzatát mutatja a mellékelt ábra. Az oromzat ívét leíró görbe érintője a végpontokban vízszintes. Az építész a görbét az  $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$  függvény grafikonjával szeretné megadni.



a) Határozzuk meg az  $f(x)$  függvény hozzárendelési szabályában szereplő  $a$ ,  $b$  és  $c$  konstansokat.

b) Minimum hány doboz festékre lesz szükség az oromzat kétszeri újrafestéséhez, ha  $1 \text{ m}^2$ -re  $350 \text{ cm}^3$  festék szükséges, és 2 literes, 4 literes, illetve 5 literes kiszerezésben kapható a festék? (16 pont)

**Megoldás.** a) Az  $x = 0$  helyettesítéssel kapjuk, hogy  $f(0) = 4 = c$ . Tudjuk, hogy  $f(-4) = f(4) = 0 = 256a + 16b + 4$ . Tudjuk továbbá, hogy  $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$ , vagyis  $f'(4) = 0 = 256a + 8b$ .

A következő egyenletrendszer megoldásával kapjuk a hiányzó konstansokat:

$$\left. \begin{aligned} 256a + 16b + 4 &= 0, \\ 256a + 8b &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Azaz:  $a = \frac{1}{64}$ ,  $b = -\frac{1}{2}$ .

Tehát a keresett konstansok:  $a = \frac{1}{64}$ ,  $b = -\frac{1}{2}$ ,  $c = 4$ .

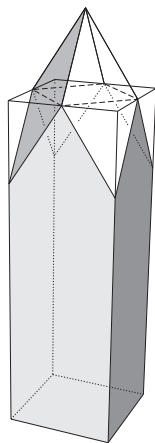
b) Az oromzatot leíró függvény hozzárendelési szabálya:  $f(x) = \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 4$ . A homlokzat területe:

$$T = \int_{-4}^4 \left( \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 4 \right) dx = \left[ \frac{x^5}{320} - \frac{x^3}{6} + 4x \right]_{-4}^4 = \frac{256}{15} \approx 17.$$

A szükséges festék térfogata  $\text{cm}^3$ -ben:  $V = 17 \cdot 2 \cdot 350 = 11\,900$ , ami 11,9 liter.

Tehát minimum 3 doboz festékre lesz szükség (2 db 5 literesre és 1 db 2 literesre vagy 3 db 4 literesre).

9. Architectos fejedelem három fiával és seregeivel elfoglalt egy várost. A városfal három sarkán három egyforma négyzetes oszlop alakú torony állt, melyek alapéle 8 m, magasságuk 40 m volt. A győzelem emlékére a három fiú a három tornyot átalakította. Mindhárom átépítés nagyon hasonló volt egymáshoz. Az eredeti tornyok fedőlapjainak szomszédos élfelezőpontjait összekötő szakaszok mentén levágtak négy egyforma sarkot. Ezeket a megmaradt fedőlapra ültették az ábrának megfelelően úgy, hogy az új toronytető egymáshoz kapcsolódó rombuszokból állt.



A legidősebb fiú tornyának felszíne nem változott az átépítés után.

A középső fiú úgy végezte el az átalakítást, hogy a torony teljes felszíne a lehető legkisebb lett.

A legfiatalabb fiú tornyán a szomszédos tetősíkok  $120^\circ$ -os szöveget zártak be.

Adjuk meg az átépített toronyok magasságát.

(16 pont)

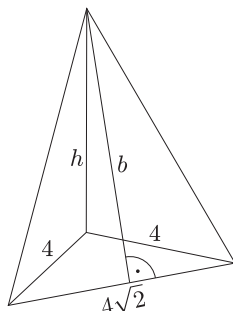
**Megoldás.** Jelöljük  $h$ -val, hogy mennyivel lesz magasabb az új torony az eredetinél. A rombusz (ábrán is látható) fél átlójának hossza legyen  $b$ , a másik átló  $4\sqrt{2}$  hosszúságú. Az eredeti torony felszíne:

$$A = 4 \cdot 40 \cdot 8 + 8 \cdot 8 = 1344.$$

Az új tető felszíne:

$$A = 4 \cdot \frac{4\sqrt{2} \cdot 2b}{2} = 16b \cdot \sqrt{2}.$$

A Pitagorasz-tétel alapján:  $b = \sqrt{8 + h^2}$ .



Az eredeti felszín csökken a fedőlap és az oldallapokon lévő háromszögek területével:

$$8 \cdot 8 + 8 \cdot \frac{4h}{2} = 64 + 16h.$$

Ennek és az új tető felszínének egyenlőnek kell lennie, hogy ne változzon a felszín:

$$64 + 16h = 16\sqrt{2} \cdot \sqrt{8 + h^2}.$$

Oszthatunk 16-tal:

$$4 + h = \sqrt{16 + 2h^2}.$$

Négyzetre emelhetjük mindkét oldalt:

$$16 + 8h + h^2 = 16 + 2h^2, \quad \text{azaz} \quad 0 = h^2 - 8h = h(h - 8).$$

Csak a  $h = 8$  lehet a megoldás. A hosszúság adatok méterben voltak adva, ezért ez a torony 8 méterrel lett magasabb. A legidősebb fiú tornya az átépítés után 48 méter magas lett.

A középső fiú által átépített új torony felszíne:

$$A(h) = 1344 - (64 + 16h) + 16\sqrt{16 + 2h^2} = 1280 - 16h + 16\sqrt{16 + 2h^2}.$$

Ennek a függvénynek keressük a minimumhelyét. Ehhez szükségünk van a függvény deriváltjának zérushelyére:

$$A'(h) = -16 + 16 \cdot \frac{1}{2\sqrt{16+2h^2}} \cdot 4h = \frac{16}{\sqrt{16+2h^2}}(2h - \sqrt{16+2h^2}) = 0.$$

Vagyis:  $2h = \sqrt{16+2h^2}$ , amiből kapjuk, hogy  $0 = 16 - 2h^2$ . Ennek pozitív gyöke:  $h = 2\sqrt{2}$ . Ezen a helyen az első derivált negatívból pozitívba vált, tehát a felszínnek itt valóban minimuma van.

A középső fiú tornya az átépítés után  $40 + 2\sqrt{2}$ , azaz kb. 42,8 méter magas lett.

A legfiatalabb fiú tornyán két szomszédos =rombusz közös oldalára bocsátott közös talppontú magasságai által bezárt szög:  $120^\circ$ , a rombusz magassága  $m$ , oldala:  $\sqrt{16+h^2}$ . A rombusz területe:

$$\sqrt{16+h^2} \cdot m = \frac{4\sqrt{2} \cdot 2b}{2} = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{8+h^2}, \quad \text{amiből} \quad m = \frac{4\sqrt{16+2h^2}}{\sqrt{16+h^2}}.$$

A 8 egység alapú  $m$  szárú egyenlőszárú háromszög szárszöge  $120^\circ$  (a két szomszédos tetőlap hajlásszöge):

$$\sin \frac{120^\circ}{2} = \frac{4}{m} = \sqrt{\frac{16+h^2}{16+2h^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{azaz:} \quad \frac{16+h^2}{16+2h^2} = \frac{3}{4},$$

amiből:  $64 + 4h^2 = 48 + 6h^2$ , vagyis:  $8 = h^2$ . Kapjuk, hogy  $h = 2\sqrt{2}$ .

A legfiatalabb fiú tornya is az átépítés után  $40 + 2\sqrt{2}$ , azaz kb. 42,8 méter magas lett.