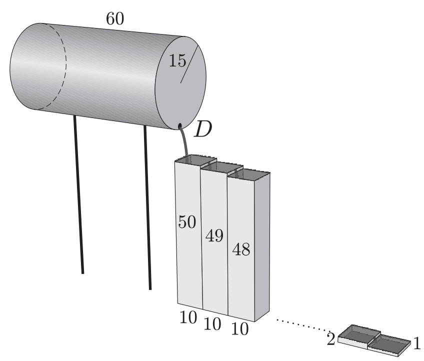
I. rész

1. Legyen az A halmaz az a), a B halmaz a b) kifejezés értelmezési tartománya.

$$a)\qquad \log_{x+5}(x^2-9x+14), \qquad\qquad b)\qquad \sqrt{\frac{10-x}{x^2+4}}.$$

Ábrázoljuk számegyenesen a $B \setminus A$ halmaz elemeit. (*11 pont*)

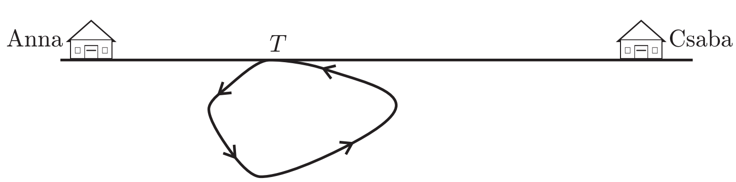
2. Egy egyenes körhenger alakú zárt tartály alapkörének sugara 15 cm, magassága 60 cm. A tartályt vízszintes helyzetben két rúdra erősítették. A vízzel félig töltött tartály alján van egy D dugó (lásd *ábra*). Ha ezt kihúzzák, akkor a tartály alá helyezett egyenes hasáb alakú felül nyitott edényekbe folyik a víz. Minden hasáb alapnégyzetének oldala 10 cm. Az első hasáb magassága 50 cm, a másodiké 49 cm, a harmadiké 48 cm és így tovább. Amikor az első hasáb megtelik, onnan átfolyik a másodikba, ha az is megtelik, akkor átfolyik a harmadikba stb.



Hány hasáb telik meg vízzel? (*12 pont*)

3. A négyzetszámokat „csomagokba” helyezzük az alábbi módon:
1. csomag: (1),
2. csomag: $(4, 9)$,
3. csomag: $(16, 25, 36)$,
4. csomag: $(49, 64, 81, 100)$, stb.
a) Melyik számmal kezdődik a 16. csomag?
b) Melyik csomagban szerepel a 8281 négyzetszám? (*14 pont*)

4. Anna és Csaba háza egy egyenes út mentén található. Egy alkalommal megbeszélték, hogy együtt mennek kerékpározni. Déli 12 órakor a házaik közötti útszakasz egy olyan pontjában találkoztak, ahonnan egy biciklis körút indul.



Találkozáskor Anna napi átlagsebesség-mérője 23 km/h, Csabáé pedig 28 km/h átlagsebességet jelzett. (Ezen a napon délig mindketten csak erre az útra használták a kerékpárjukat.) A 26 km-es körutat 1 óra alatt tették meg, ekkor a déli találkozási pontba visszaérve elbúcsúztak egymástól és mindketten hazamentek. A búcsúzáskor Anna átlagsebesség-mérője 25 km/h-t, Csabáé 27 km/h-t mutatott. Milyen messze lakik egymástól Anna és Csaba? (*14 pont*)

II. rész

5. Egy svájci kantonban olyan lottójáték van forgalomban, melynél az első 50 pozitív egész számból kell 5-öt eltalálni. Egy szenvedélyes lottózó először kiválasztja az első két számot, majd harmadiknak az első kettő összegét, negyediknek az első három összegét, végül ötödiknek az első négy szám összegét.
a) Legfeljebb mekkorának választhatja ez az ember a legkisebb számot?

b) Ha emberünk a legkisebb számot a lehető legnagyobbnak választja, akkor mely számok szerepelhetnek a kitöltött szelvényén?

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy emberünknek telitalálata lesz, ha a fenti eljárásnak megfelelően minden lehetséges módon kitölt egy-egy szelvényt? (*16 pont*)

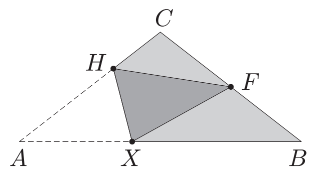
6. Adott a $[0;9]$ intervallumon értelmezett $f(x)=2\sqrt{x}$ függvény.

a) Egy szabályos háromszög egyik csúcsa az origó, egy másik csúcsa az x tengelyre, a harmadik csúcsa pedig az $f(x)$ függvény görbéjére illeszkedik. Mekkora e háromszög területe?

b) Egy téglalap egyik oldala az x tengelyre, egy másik oldala az $x=9$ egyenesre, egy csúcsa pedig az $f(x)$ függvény görbéjére illeszkedik. Határozzuk meg a legnagyobb ilyen téglalap területét.

c) Az $f(x)$ függvénygörbe és az x tengely közötti területet az $x=a$ egyenes felezi. Határozzuk meg az a paraméter értékét. (*16 pont*)

7. Egy óbudai vendéglőben az egyenlő szárú háromszög alakú szalvétákat úgy hajtogatják, hogy az ABC háromszög AB alapjának A csúcsa a BC szár F felezőpontjába kerüljön. Ekkor a hajtás élének egyik végpontja az AC szár C-hez közelebbi H harmadoló pontjába kerül.



Hová kerül a hajtás élének másik (X) végpontja? (*16 pont*)

8. Karcsi meglátott a kirakatban egy igen kedvező árú sportcipőt. Bement, hogy megvásárolja, de legnagyobb megdöbbenésére a pénztárnál a kirakatban látott ár négyszeresét akarták fizettetni vele. Kiderült, hogy a kirakatrendező a cipő árát jelző négyjegyű szám számjegyeit véletlenül fordított sorrendben írta ki. Mennyibe került a sportcipő? (*16 pont*)

9. *a*) Az ABC háromszög oldalai 10, 12 és 15 cm hosszúak. Az oldalakon (az oldalak végpontjait kivéve) minden egész cm helyen megjelöltük a pontokat. Ezután képeztük az összes olyan háromszöget, melynek csúcspontjai a megjelölt pontok közül valók. Hány darab ilyen háromszöget képezhetünk?

b) A PQR szabályos háromszög oldalai n cm hosszúak, ahol $n>2$ egész szám. Az oldalakon (az oldalak végpontjait kivéve) minden egész cm helyen megjelöltük a pontokat. Ezután képeztük az összes olyan háromszöget, melynek csúcspontjai a kijelölt pontok közül valók, majd képeztük az összes olyan négyszöget, melynek két csúcsa egy oldalon, másik két csúcsa pedig a háromszög másik, illetve a harmadik oldalának kijelölt pontjai közül való. Miből van több: háromszögből vagy négyszögből? (*16 pont*)