A hagyományoknak megfelelően ebben az évben is közöljük a nyári matematikai diákolimpia feladatainak a megoldásait; lényegében úgy, ahogyan a legilletékesebbek, a magyar csapat tagjai leírták. Közreműködésüket köszönjük és ezúton is gratulálunk eredményeikhez.

A szerkesztőség

1. *Legyen n pozitív egész szám és legyenek $a_1, \dots, a_k$ $(k \geq 2)$ olyan páronként különböző egész számok az $\{1, \dots, n\}$ halmazból, hogy az $i = 1, \dots, k-1$ értékek mindegyikére teljesül az, hogy n osztója $a_i(a_{i+1}-1)$-nek. Bizonyítsuk be, hogy n nem osztója $a_k(a_1-1)$-nek.*

Nagy Dániel megoldása. $n \mid a_i(a_{i+1}-1)$ azt jelenti, hogy

$$a_i \equiv a_i a_{i+1} \pmod{n}. \tag{1}$$

Ezt felhasználva:

$$a_1 a_k \equiv a_1 a_2 a_k \equiv a_1 a_2 a_3 a_k \equiv \ldots \equiv a_1 a_2 \ldots a_{k-1} a_k \pmod{n}.$$

Az (1) alapján újra kapjuk, hogy

$$a_1 a_2 \ldots a_{k-1} a_k \equiv a_1 a_2 \ldots a_{k-1} \equiv a_1 a_2 \ldots a_{k-2} \equiv \ldots \equiv a_1 a_2 \equiv a_1 \pmod{n}.$$

A fentiekből következik, hogy

$$a_1 a_k \equiv a_1 \pmod{n}. \tag{2}$$

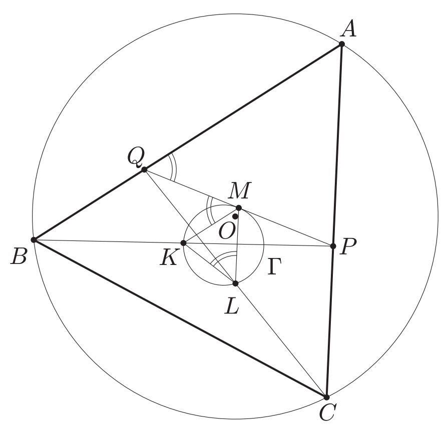
A bizonyítandó állítás szerint $n \nmid a_k(a_1-1)$. Felhasználva (2)-t:

$$a_k(a_1-1) = a_1 a_k - a_k \equiv a_1 - a_k \pmod{n}.$$

Mivel $0 < |a_1 - a_k| < n$, tehát az n-nel való osztási maradék 0-nál nagyobb, így $n \nmid a_k(a_1-1)$.

2. *Legyen az ABC háromszög körülírt körének középpontja O. Legyen P, illetve Q a CA, illetve AB oldal belső pontja. Legyenek K, L, illetve M a BP, CQ, illetve PQ szakaszok felezőpontjai, és legyen Γ a K, L, M pontokon áthaladó kör. Tegyük fel, hogy a PQ egyenes érintője a Γ körnek. Bizonyítsuk be, hogy $OP = OQ$.*

Szűcs Gergely megoldása. Mivel $KLM\sphericalangle$ és $KMQ\sphericalangle$ egy ívhez tartozó kerületi, illetve érintőszárú kerületi szögek, így $KLM\sphericalangle = KMQ\sphericalangle$. Nyilván $MK \parallel QB$, mivel MK a QBP háromszögben középvonal, így $PQA\sphericalangle = KMQ\sphericalangle$, mert váltószögek. Tehát $PQA\sphericalangle = KMQ\sphericalangle$, és hasonlóan $APQ\sphericalangle = MKL\sphericalangle$, így $APQ\triangle \sim MKL\triangle$.



Ebből $\dfrac{MK}{ML} = \dfrac{AP}{AQ}$, de

$$\frac{MK}{ML} = \frac{\frac{QB}{2}}{\frac{PC}{2}} = \frac{QB}{PC},$$

tehát

$$\frac{QB}{PC} = \frac{AP}{AQ},$$

amiből $QA \cdot QB = PA \cdot PC$, vagyis a P és Q pontoknak a körülírt körre vonatkozó hatványa megegyezik (lásd KöMaL 2009/4. szám, hátsó belső borító), amiből már $OP = OQ$ következik.

3. *Tegyük fel, hogy $s_1, s_2, s_3, \ldots$ pozitív egész számoknak olyan szigorúan növekvő sorozata, amelyre az*

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \qquad \text{és} \qquad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

részsorozatok mindegyike számtani sorozat. Bizonyítsuk be, hogy $s_1, s_2, s_3, \ldots$ maga is számtani sorozat.

Tomon István megoldása. Tekintsük a $t_i = s_{i+1} - s_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ különbségeket, és legyen j egy olyan pozitív egész, amelyre $t_j = \min\{t_1, t_2 \ldots\}$ (mivel $t_1, t_2, \ldots$ pozitív egészek, létezik ilyen j). Legyen $a = s_j$ és $b = s_{j+1}$, ekkor $b > a$ a sorozat szigorú monotonitása miatt, és legyen d az $s_{s_1}, s_{s_2}, \ldots$ számtani sorozat differenciája. Ekkor s_{s_j} és $s_{s_{j+1}}$ ezen sorozat két egymást követő eleme, így $s_b - s_a = d$. Mivel s_i szigorúan monoton nő, $s_a < s_{a+1} < \ldots < s_b$, vagyis az $s_{a+1} - s_a$, $s_{a+2} - s_{a+1}$, $\ldots$, $s_b - s_{b-1}$ különbségek mind pozitívak, összegük $s_b - s_a = d$, s mivel $b - a$ darab különbség létezik, a legnagyobb legalább $\dfrac{d}{b-a}$. Legyen ekkor x egy olyan pozitív egész, amelyre $a \le x < b$ és a legnagyobb különbség $s_{x+1} - s_x \ge \dfrac{d}{b-a}$. Egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha minden különbség $\dfrac{d}{b-a}$.

Ezután nézzük az s_{s_x} és $s_{s_{x+1}}$ között lévő elemeket. Az egyszerűség kedvéért legyen $s_x = e$, $s_{x+1} = f$, ekkor $s_f - s_e = s_{s_{x+1}} - s_{s_x} = d$, s ha nézzük az $s_{e+1} - s_e$, $s_{e+2} - s_{e+1}$, $\ldots$, $s_f - s_{f-1}$ különbségeket, akkor az $f - e$ darab pozitív különbség, melyek összege $s_f - s_e = d$. Legyen y egy olyan pozitív egész, amelyre $e \le y < f$ és $s_{y+1} - s_y$ a legkisebb különbség a felsoroltak között. Ekkor

$$s_{y+1} - s_y \le \frac{d}{f-e} = \frac{d}{s_{x+1} - s_x} \le \frac{d}{\frac{d}{b-a}} = b - a,$$

és egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha mindegyik különbség egyenlő, azaz $s_{e+1} - s_e = s_{e+2} - s_{e+1} = \ldots = s_f - s_{f-1}$. Ám szükséges, hogy egyenlőség álljon fenn mindenhol, különben $s_{y+1} - s_y < b - a$, ami ellentmond annak, hogy $b - a$ a legkisebb előforduló különbség az s_i sorozat két szomszédos eleme között. Ha egyenlőség áll fenn, az azt jelenti, hogy az $s_a, s_{a+1}, \ldots, s_b$ sorozat egy $\dfrac{d}{b-a}$ differenciájú számtani sorozatot alkot és $s_e, s_{e+1}, \ldots, s_f$ is számtani sorozatot alkot, aminek $b - a$ a differenciája.

Ezek után megmutatjuk, hogy $(b-a)^2 = d$, vagyis $b - a = \dfrac{d}{b-a}$. Az előbbiek alapján ehhez elég igazolni, hogy

$$s_{a+1} - s_a = s_{e+1} - s_e, \tag{1}$$

mivel $\dfrac{d}{b-a} = s_{a+1} - s_a$ és $b - a = s_{e+1} - s_e$. (1)-hez pedig elég belátni, hogy a feladatban megadott $s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, \ldots$ számtani sorozat differenciája is d, mivel ekkor

$$|s_{e+1} - s_{a+1}| = d \cdot \big|(e+1) - (a+1)\big| = d \cdot |e - a| = |s_e - s_a|,$$

ami (1)-gyel ekvivalens.

Tegyük fel indirekt módon, hogy az $s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, \ldots$ számtani sorozat differenciája $c \ne d$. Nézzünk két esetet.

1. Ha $c > d$, akkor tetszőleges m pozitív egész esetén

$$s_{s_m+1} = s_{s_1+1} + (s_m - s_1) \cdot c$$

és

$$s_{s_{m+1}} = s_{s_1} + (s_{m+1} - s_1) \cdot d \le s_{s_1} + (d + s_m - s_1) \cdot d = s_{s_1} + d^2 + (s_m - s_1) \cdot d,$$

ahol az egyenlőtlenség miatt teljesül, hogy valamely $r \in \mathbb{N}^+$ esetén $s_r \le m < s_m$ (mivel az s_i sorozat tetszőlegesen nagy értéket felvehet), s ekkor $s_{s_r} \le s_m < s_{m+1} \le s_{s_r+1}$ a szigorú monotonitás miatt, ahol s_{s_r} és s_{s_r+1} differenciája d. Mivel s_i akármilyen határon túl nő, $\exists m$, hogy $s_m - s_1 > \dfrac{d^2}{c-d}$, és ekkor

$$\begin{aligned} s_{s_m+1} - s_{s_{m+1}} &\ge s_{s_1+1} + (s_m - s_1) \cdot c - \big(s_{s_1} + (s_m - s_1)d + d^2\big) > \\ &> (s_m - s_1) \cdot (c - d) - d^2 > 0, \end{aligned}$$

vagyis $s_{s_m+1} > s_{m+1}$, ami ellentmondás, mivel $s_m + 1 \le s_{m+1}$.

2. Hasonlóan a $c < d$ esetben:

$$s_{s_m+1} = s_{s_1+1} + (s_m - s_1)c \quad \text{és} \quad s_{s_m} = s_{s_1} + (s_m - s_1)d > (s_m - s_1)d.$$

Ekkor ha $(s_m - s_1) > \dfrac{s_{s_1+1}}{d-c}$, akkor $s_{s_m} - s_{s_m+1} > (s_m - s_1)(d - c) - s_{s_1+1} > 0$, vagyis $s_{s_m} > s_{s_m+1}$, ami ellentmondás a szigorú monotonitás miatt.

Tehát bebizonyítottuk, hogy $c = d$, így megkaptuk, hogy $d = (b-a)^2$.

Ezután megmutatjuk, hogy $i = 1, 2, \ldots$ esetén $s_{i+1} - s_i = b - a$, azaz az $s_1, s_2, \ldots$ sorozat is egy számtani sorozat. Mivel a minimális különbség két szomszédos elem között $b - a$, így $s_{i+1} - s_i \ge b - a$. Tegyük fel, hogy valamely r-re $s_{r+1} - s_r > b - a$. Ekkor $s_{s_{r+1}} - s_{s_r} = d$ és az $s_{s_r+1} - s_{s_r}, \ldots, s_{s_{r+1}} - s_{s_{r+1}-1}$ különbségek összege d, és $s_{r+1} - s_r$ darab van, így lesz köztük egy, amelyik legfeljebb

$$\frac{d}{s_{r+1} - s_r} < \frac{d}{b-a} = b - a,$$

vagyis az egyik különbség kisebb $(b-a)$-nál, ami ellentmondás.

Tehát minden különbség $b-a$, vagyis $s_1, s_2, \ldots$ számtani sorozatot alkot, s ezzel a feladat állítását bizonyítottuk.

4. *Legyen az ABC háromszögben $AB = AC$. A $CAB\sphericalangle$, illetve $ABC\sphericalangle$ szögek szögfelezői a BC, illetve CA oldalakat rendre a D, illetve E pontokban metszik. Legyen K az ADC háromszög beírt körének a középpontja. Tegyük fel, hogy $BEK\sphericalangle = 45°$. Határozzuk meg a CAB szög összes lehetséges értékét.*

Kornis Kristóf megoldása. Legyen D' a D pont tükörképe a C-ből induló szögfelezőre. Ha O az ABC beírt körének középpontja, $ODC\sphericalangle = 90° \Rightarrow ODK\sphericalangle = 45°$, hiszen DK felezi az ODC szöget. Viszont O és K is rajta van a C-ből induló szögfelezőn, így $OD'K\sphericalangle = 45°$ és D', E OK egy oldalán vannak, tehát $BEK\sphericalangle = 45°$ miatt O, E, D' és K egy körön fekszenek. Emiatt $KED'\sphericalangle = KOD'\sphericalangle$.

Viszont $KOD'\sphericalangle = KOD\sphericalangle$, és ha $BAC\sphericalangle = \alpha$, akkor

$$EBC\sphericalangle = \frac{90° - \frac{\alpha}{2}}{2}, \quad ECB\sphericalangle = 90° - \frac{\alpha}{2} \;\Rightarrow$$

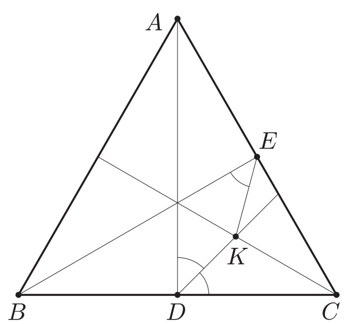
$$\Rightarrow\; KED'\sphericalangle = BED\sphericalangle - 45° = 180° - \frac{90° - \frac{\alpha}{2}}{2} - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) - 45°,$$

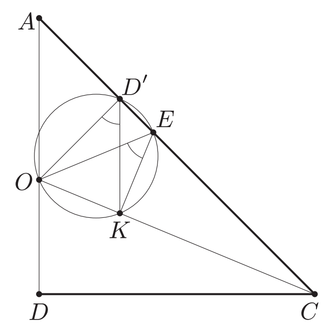
$$KOD\sphericalangle = 90° - \left(\frac{90° - \frac{\alpha}{2}}{2}\right).$$

Mivel

$$KED'\sphericalangle = KOD\sphericalangle, \quad 45° - \frac{90° - \frac{\alpha}{2} - \alpha}{2} = 90° - \frac{90° - \frac{\alpha}{2}}{2},$$

$45° = \dfrac{\alpha}{2} \;\Rightarrow\; \alpha = 90°.$





A fenti számolással probléma lehet, ha $D' = E$, ugyanis ekkor nem beszélhetünk a $KED'\sphericalangle$-ről. Ha $D' = E$, akkor $CD = CE$, és ekkor ha az alap a, a szár b hosszú,

$$CD = \frac{a}{2}, \quad CE = \frac{a \cdot b}{a+b}, \quad \frac{a}{2} = \frac{a \cdot b}{a+b} \quad \Rightarrow \quad a^2 + ab = 2ab \quad \Rightarrow \quad a = b,$$

a háromszög szabályos. Ha viszont a háromszög szabályos, $OECD$ deltoid, érintőnégyszög, így az ACD háromszög beírt köre érinti BE-t is, tehát

$$BEK\sphericalangle = \frac{BEC\sphericalangle}{2}, \quad \text{de} \quad BEC\sphericalangle = 90°,$$

vagyis a $BEK\sphericalangle$ ebben az esetben is $45°$ lesz.

Összefoglalva két megoldást kaptunk: $CAB\sphericalangle = 90°$, vagy $CAB\sphericalangle = 60°$.

5. *Határozzuk meg az összes olyan f függvényt, ami a pozitív egész számok halmazát a pozitív egész számok halmazába képezi, és amire teljesül az, hogy teszőleges pozitív egész a és b értékekre van olyan nem-elfajuló háromszög, amelynek oldalhosszai a, $f(b)$ és $f\big(b + f(a) - 1\big)$. (Egy háromszög* nem-elfajuló, *ha csúcsai nincsenek egy egyenesen.)*

Nagy János megoldása. Először helyettesítsünk be $(a = 1)$-et. Ekkor az 1, $f(b)$, $f\big(b + f(1) - 1\big)$ számokra igazak a háromszög-egyenlőtlenségek, de mivel egészek, ez csak úgy lehet, ha $f(b) = f\big(b + f(1) - 1\big)$ minden $b \in \mathbb{N}^+$-ra.

Indirekt tegyük fel, hogy $f(1) \neq 1$. Ekkor minden pozitív egész c-re

$$a + c\big(f(1) - 1\big), \quad f(b) \quad \text{és} \quad f\Big(b + f\big(a + c\big(f(1) - 1\big)\big) - 1\Big)$$

egy háromszög oldalai, de $f\big(b + f(1) - 1\big) = f(b)$ ismételt alkalmazásával $a + c\big(f(1) - 1\big)$, $f(b)$, $f\big(b + f(a) - 1\big)$ is egy háromszög oldalai. Ekkor c-t megválaszthatjuk úgy, hogy a háromszög-egyenlőtlenség ne teljesüljön, tehát kaptuk, hogy $f(1) = 1$.

Helyettesítsünk be $b = 1$-et, ekkor a, 1 és $f\big(f(a)\big)$ egy háromszög oldalai. Ez az egyenlőtlenségek miatt csak úgy lehet, hogy $f\big(f(a)\big) = a$, minden $a \in \mathbb{N}^+$-ra.

Most látjuk, hogy a függvény minden értéket fölvesz $\big(f\big(f(a)\big) = a\big)$ és kölcsönösen egyértelmű is, hiszen ha $f(a) = f(b)$, akkor $f\big(f(a)\big) = f\big(f(b)\big)$, vagyis $a = b$. Most igazoljuk, hogy $f(2) = 2$. A kölcsönös egyértelműség miatt $f(2) > 1$. Indirekten tegyük fel, hogy $f(2) = x > 2$. Helyettesítsünk be $a = 2$-t; ekkor

$$2 + f(b) > f(b + x - 1), \quad \text{de} \quad f(b + x - 1) + 2 > f(b),$$

és a kölcsönös egyértelműség miatt nem egyenlőek, tehát $\big|f(b + x - 1) - f(b)\big| = 1$.

Most vegyük az $f(x)$, $f\big(x + (x-1)\big)$, $\ldots$, $f\big(x + c(x-1)\big)$, $\ldots$ sorozatot, ennek bármely két szomszédos tagja között a különbség 1. Tudjuk, hogy $f(x) = 2$. Ennek a sorozatnak az elemei csak úgy léphetnének ki a $[0, x]$ intervallumból, ha létezne egy $c \geq 0$ úgy, hogy $f\big(x + c(x-1)\big) = x$ (mivel egyesével változnak). Ekkor

$$f\Big(f\big(x + c(x-1)\big)\Big) = f(x) = 2 = x + c(x - 1),$$

de $x > 2$, így ez nem lehet.

Tehát az $f(x)$, $f\big(x + (x-1)\big)$, $\ldots$ sorozat elemei a $[0, x]$ intervallumban vannak, ezért lesz olyan érték, amit kétszer is felvesznek, ez pedig a kölcsönös egyértelműség miatt nem lehet.

Így látható, hogy $f(1) = 1$, $f(2) = 2$. Indukcióval belátjuk, hogy minden $(x > 0)$-ra $f(x) = x$. A kezdőlépésekkel megvagyunk; tegyük fel, hogy minden $i < x$-re $f(i) = i$. Mivel $x > 2$, azért 2 és $x - 2$ is pozitív egész számok. Behelyettesítve:

$$2, \quad f(x-1), \quad f\big(x - 1 + f(2) - 1\big)$$

egy háromszög oldalai, amiből $f(x) < f(x-1) + 2 = x + 1$, tehát $f(x) \leq x$. Az $f(x) < x$ a kölcsönösen egyértelműség miatt nem lehet. Így azt kaptuk, hogy $f(x) = x$, amivel az indukciós lépést befejeztük.

Végezetül az $f(x) = x$ függvény valóban teljesíti a feladat feltételeit, mert a, b és $a + b - 1$ mindig egy el nem fajuló háromszög oldalai. Az egyetlen jó függvény az $f(x) = x$.

6. *Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ páronként különböző pozitív egész számok és legyen M egy olyan, pozitív egész számokból álló, $n - 1$ elemű halmaz, ami nem tartalmazza az $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ számot. Egy szöcske a valós számegyenesen ugrál a 0 pontból kiindulva úgy, hogy n ugrást hajt végre jobbfelé, melyek hossza $a_1, a_2, \ldots, a_n$ valamilyen sorrendben. Bizonyítsuk be, hogy a szöcske meg tudja választani az ugrások sorrendjét úgy, hogy ne ugorjon az M halmaz egyik elemére se.*

Éles András megoldása. A szöcske csak az O és S közötti szakaszokra léphet (és S-re biztos rálép). Megmutatjuk, hogy ha útjában legfeljebb $n - 1$ mező van, amire nem szabad lépnie, akkor végig tud menni az úton.

Feltehetjük, hogy $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Teljes indukcióval bizonyítunk n-re, $n = 1$ triviális. Ha $n = 2$, akkor $a_1 \notin M$, vagy $a_2 \notin M$, így a_1, $a_1 + a_2$, vagy a_2, $a_1 + a_2$ jó lesz. Legyen M legkisebb eleme d, ekkor $n > 2$-re három eset állhat fönn:

I. $d < a_n$, $a_n \notin M$. Legyen a szöcske első lépése a_n, ekkor átugorja d-t, így az útjában legfeljebb $n - 2$ eleme marad n-nek, és $n - 1$ különböző lépése. Az indukciós feltétel értelmében innen a szöcske már be tudja fejezni az útját (indukció: $n - 1$).

II. $d < a_n$, $a_n \in M$. Tekintsük az alábbi $2n - 1$ darab páronként különböző számot:

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n < a_1 + a_n < a_2 + a_n < \ldots < a_{n-1} + a_n.$$

Mivel $|M| \leq n - 1$ és $a_n \in M$, azért a számok közül kiválasztható egy olyan $(a_i, a_i + a_n)$ pár, hogy semelyik sincs M-ben (különben $|M| \geq n$ lenne). Legyen a_i és a_n a szöcske első két lépése, ekkor átugorja az M-beli d-t és $d < a_n$-et, így hátralévő útjában már csak legfeljebb $n - 3$ tiltott mező van, és $(n-2)$-t ugrik még, innen már be tudja fejezni az útját (indukciós feltétel, $(n-2)$-re).

III. $d \geq a_n$. Hagyjuk el a d-t az M-ből, és legyen a_n a szöcske első lépése, ami legális. További útjában (d-t nem számolva) $n - 1$ ugrás és legfeljebb $n - 2$ tiltott mező szerepel, így végig tud menni az úton (indukciós feltétel $(n-1)$-re) úgy, hogy d kivételével nem érinti M-et.

Ha d-t sem érinti, akkor a teljes útvonal jó, így készen vagyunk.

Ha d-t érinti, akkor $d \in M$ miatt $d \neq S$, így a szöcske fog még lépni d-ről, tegyük fel, hogy $(d + a_i)$-be lép. Ekkor $d + a_i \notin M$ és utána sem lép rá M-beli elemre. $(d + a_i)$-ig pedig legalább két ugrása van, mivel $d \geq a_n$ és a_n a legelső lépés, így $a_i \neq a_n$.

Rendezzük a teljes útvonalon csak a $d + a_i$ előtti ugrásokat olyan sorrendbe, hogy a_n legyen az utolsó ugrás. Ekkor az utolsó szám, amire a szöcske $d + a_i$ előtt ugrott:

$$d + a_i - a_n = d - (a_n - a_i) < d,$$

tehát $d + a_i$ előtt az átrendezett útvonalon már nincs tiltott pont, mert d-nél kisebb mindegyik.

Így ez az átrendezett útvonal egyetlen tiltott mezőt sem tartalmaz, az állítást igazoltuk.