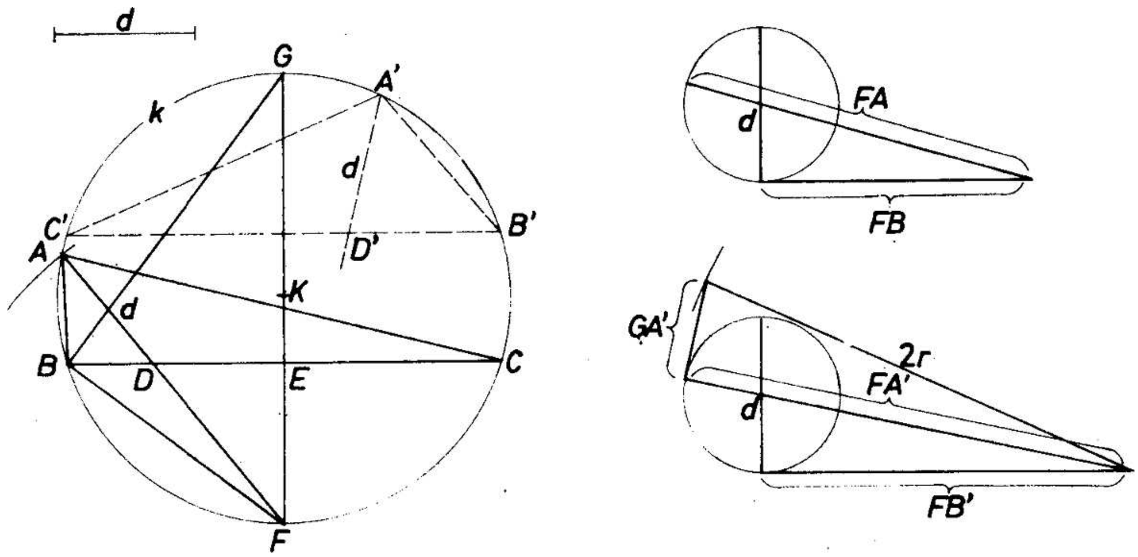
Jelöljük az adott oldal végpontjait B, C-vel, hosszát a-val, a szemközti csúcsot A-val, a körülírt kört k-val, középpontját K-val, sugarát r-rel, BC felezőpontját E-vel, az A-beli szögfelező BC-vel és k-val való metszéspontját D-vel, ill. F-fel, k-nak F-fel átellenes pontját G-vel, az AD szakasz adott hosszát d-vel. Kezdjük a háromszög szerkesztését K és k felvételével, ezután a nyilvánvaló

$$a \leq 2r$$

feltétel teljesülése esetén a BC húr és a rá merőleges FG átmérő is megrajzolható. (Ugyanis a szögfelezés miatt F felezi az BC ívet.)



1. ábra

Mivel az $ADEG$ négyszögben A-nál és E-nél derékszög van, a négyszög köré kör írható. E körre nézve F külső pont (1. ábra)

$$FA \cdot FD = FE \cdot FG = FB^2, \tag{1}$$

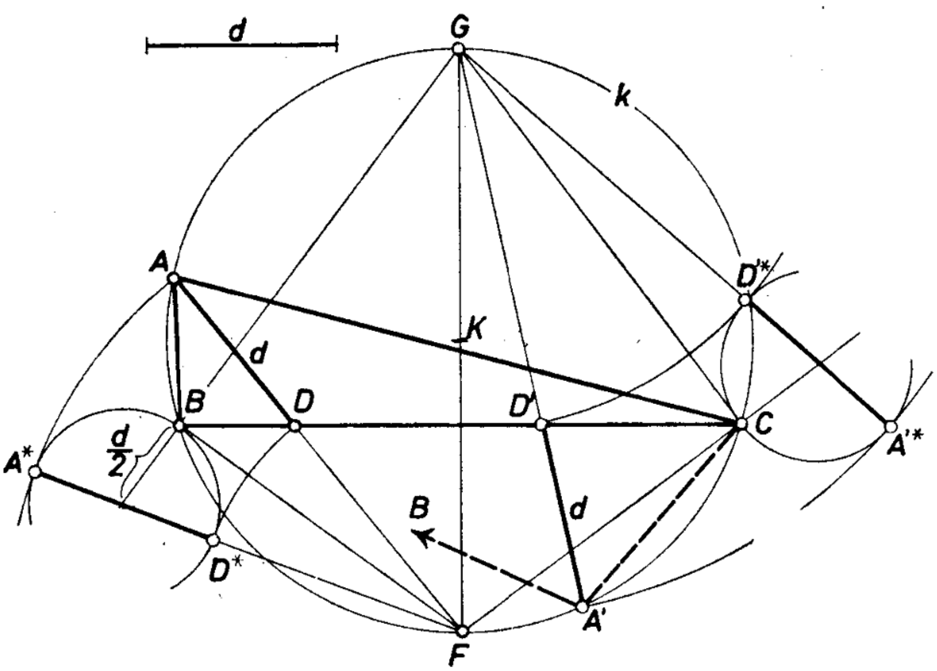
és itt ismerjük az $FA - FD = d$ különbséget. Az utolsó alakítás azon alapszik, hogy az FGB háromszög derékszögű.

Rajzoljunk hát valahol egy d átmérőjű kört, és ehhez FB-vel egyenlő hosszúságú érintő szakaszt. Ennek szabad végpontját a kör középpontjával összekötve kapjuk azt a szelőt, amelynek a darabjai FA-val, FD-vel egyenlőek (és persze $FA > FD$). A kapott FA szakasz természetesen csak akkor használható fel A kijelölésére, ha nem nagyobb $2r$-nél (az alulról való $FA > FB$ korlátozó követelmény nyilván mindig teljesül). Ezzel megkaptuk a háromszöget.

Mivel az A csúcs elvileg az ábra „alsó” BC ívén is létrejöhet – K-tól a BC által elválasztva –, azért a leírt szerkesztést úgy is meg kell kísérelnünk, hogy F szerepét G-nek adjuk át. (Az 1. ábrán azonban jobb áttekintés érdekében F-et rögzítettük és BC-nek $B'C'$ tükörképéből ismételtük a szerkesztést.) Az ábrán fölvett d szakaszból mindkét esetben $2r$-nél kisebbnek adódott FA.

Megjegyzések. 1. Eljuthatunk (1)-re hasonló háromszögpárok alapján is, ilyenek FBD és CAD, valamint FDE és FGA.

2. Elkerülhetjük segédábra használatát és megtakaríthatjuk az érintő szerkesztését, ha a főábra FB (ill. GC) szakaszához illesztjük a d átmérőjű kört úgy, hogy B legyen az érintési pont, vagyis a kör középpontja a GB (ill. FC) egyenesen legyen. Így az F-ből a kör középpontján át húzott egyenes által kimetszett A^*, D^* körpontok a körző tűhegyének fölemelése nélkül átfordíthatók A-ba, D-be. (A 2. ábra az előzővel egyenlő méretek mellett készült.)



2. ábra

Ebben az ügyes elrendezésben végezve a szerkesztést, több helyen „klasszikusnak" minősítik a megoldást. Ha még ezt is fölírjuk (1) alapján:

$$FA = \frac{d}{2} + \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + FB^2},$$

akkor az érdeklődők bizonyára észreveszik a rokonságot a szabályos 5- és 10-szög oldalának, illetve egy szakasz aranymetszés szerinti kettéosztásának jól ismert Ptolemaiosz – Dürer-féle szerkesztésével.

Többen rámutattak, hogy a feladat „félbehagyva" szerepelt 1976. szeptemberi számunk 25. oldalán mint az Iskolarádió Szakkörének előkészítő anyaga. – És persze – mint „híres" feladat – szerepelt már előbb többször is, pl. az 1962. májusi szám 201. oldalán. (3 megoldásból 2 speciálisan derékszögű háromszögre vonatkozik az ottani kitűzés szerint.)

4. Ha a c oldal helyett a γ szög volna adott, elmaradna F és G megkülönböztetése.