

**1. Egyenlítői gravitációs gyűrű a Nap felületén.** A Nap tengelykörüli forgásának következtében az egyenlítőnél egy kicsit nagyobb a sugara, mint a sarkoknál, így az anyageloszlás a Nap forgástengelye körül nem gömbszimmetrikus. Emiatt precesszálnak a bolygópályák a Naprendszerben (csúszik el a perihelium helye). Egy egyszerű modellben úgy tekinthetjük, hogy a Nap forgása miatt a Nap egyenlítőjén egy gravitációs gyűrű alakul ki a Nap felületén, melynek vastagsága elhanyagolható, tömege pedig  $M \ll M_S$ , ahol  $M_S$  a Nap tömege (beleértve a gyűrű tömegét is).

Ennek a hatásnak a bizonyítására feltételezzük, hogy a Nap anyaga egyenletesen és szimmetrikusan oszlik el a bolygópályára merőleges tengely körül, és a Nap–bolygó rendszer gravitációs potenciális energiája, a javasolt modellnek megfelelően, amikor az  $m$  tömegű bolygó távolsága a Naptól  $r \gg R$ , a következő kifejezéssel adható meg:

$$E_p = -\frac{k}{r} \left[ 1 + \frac{1}{2} J_2 \left( \frac{R}{r} \right)^2 - \frac{3}{8} J_4 \left( \frac{R}{r} \right)^4 + \frac{5}{16} J_6 \left( \frac{R}{r} \right)^6 + \dots \right],$$

ahol  $R$  a Nap sugara. A  $J_2, J_4, J_6, \dots$  konstansok a Nap anyagának pontos eloszlásától függenek.

a) Kvalitatív érvekkel határozd meg az  $E_p$  gravitációs potenciális energia fenti képletében szereplő  $k$  értékét. Az általános tömegvonzás  $\gamma$  állandóját tekintsd ismertnek.

Határozd meg az  $E_p$  gravitációs potenciális energia fenti képletében szereplő  $J_2$  állandó értékét, felhasználva a javasolt modellt. Használhatod a következő közelítést:

$$(1 + \alpha)^n \cong 1 + n\alpha + \frac{1}{2}n(n-1)\alpha^2; \quad \alpha \ll 1.$$

b) Olyan elliptikus bolygópálya, amelynek kicsi az excentricitása, és a bolygópálya csak nagyon kicsit tér el az egyenlítői körpályától, úgy is felfogható, hogy a bolygó nagyon kis amplitudójú sugárirányú rezgést végez az  $r = r_0$  távolság körül, és ez a rezgés rátevédik a bolygó Nap körüli körmozgására. (Ha ezt a folyamatot a perdületmegmaradás törvénye alapján vizsgáljuk, akkor kiderül, hogy a sugárirányú rezgés mindenképp együttjár egy azonos periódusidejű érintőirányú rezgéssel is. Ebben a feladatban ezt a hatást elhanyagoljuk.)

Határozd meg a bolygó sugárirányú rezgésének periódusidejét, ha tudjuk, hogy  $J_2 = 0$ . A bolygó keringési ideje a Nap körül  $T_k$ . Feltéve, hogy  $J_2 = 0$ , írd fel a bolygó mozgási energiáját a következő mennyiségek függvényében: a bolygó  $p_{\text{rad}}$  sugárirányú impulzusa; a bolygó  $L$  perdülete; a bolygó  $m$  tömege és a bolygó Naptól mért  $r$  távolsága.

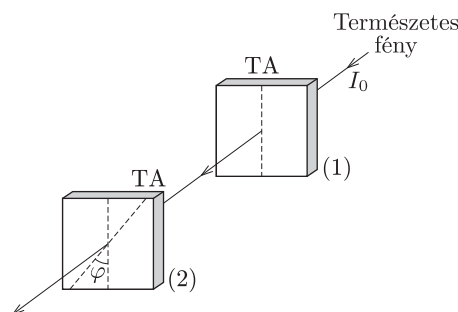
c) Figyelembe véve, hogy a bolygó perdülete állandó ( $L = \text{konstans}$ ), a Nap–bolygó rendszer összenergiájának minden olyan tagját, ami nem függ a sugárirányú impulzustól, feleltess meg egy a bolygó helyétől függő  $V_{\text{eff}} = V_{\text{eff}}(r)$  effektív gravitációs potenciálnak. Az effektív gravitációs potenciál bevezetése a bolygó mozgását csak sugárirányú mozgásra korlátozza.

Határozd meg azt az  $r_0$  távolságot, ahol az  $F_{\text{eff}} = \frac{dV_{\text{eff}}}{dr}$  effektív gravitációs erő nulla.

d) Felhasználva a feladatban javasolt közelítést, határozd meg a Nap–bolygó rendszer összenergiájának közelítő kifejezését  $r = r_0 + \Delta r$  helyen, ahol  $\Delta r \ll r_0$ , csak az  $R^2$ -nél nem nagyobb tagokat megtartva. Majd ezt a kifejezést összevetve a harmonikus oszcillátor összenergiájának kifejezésével, határozd meg a bolygó sugárirányú rezgésének  $T_r$  periódusidejét, ha  $J_2 \neq 0$ .

Speciális eset:  $J_2 = 0$ .

**2. Valóságos polárszűrők.** Tudjuk, hogy a valóságos polárszűrő lemezek nem ideális polarizátorok, vagyis az áteresztési iránnyal (TA) párhuzamos elektromos rezgéseknek nem az összes energiáját engedik át, illetve a TA irányra merőleges elektromos rezgéseket nem nyelik el teljesen. Tegyük fel, hogy az első esetben az energia  $\alpha$  hányada jut át, illetve a második esetben az energia  $\beta$  hányadát engedi át a polarizátor. A polárszűrő párra  $I_0$  intenzitású, közösleges, polarizálatlan fénnyaláb esik.



a) Határozd meg egy valóságos polárszűrő pár által átengedett fénnyaláb  $I$  intenzitását abban az esetben, ha a polárszűrők az ábra szerint azonos optikai tengelyen helyezkednek el, és a két szűrő TA iránya által bezárt szög  $\varphi$ .

Vizsgáld meg az eredményt ideális polárszűrők esetén is! Az így kapott összefüggés az úgynevezett Malus-törvény.

b) Adjunk összefüggést arra a  $\varphi$  szögre, amely esetén a valóságos polárszűrő pár által átengedett fényintenzitás megegyezik az ideális polárszűrő pár által átengedett fényintenzitással. Mi a feltétele annak, hogy ilyen  $\varphi$  szög létezzen?

c) Legyen  $\alpha = 0,95$  és  $\beta = 0,05$  egy adott polárszűrő párra. Számítsd ki az  $I/I_0$  arányt valóságos és ideális polárszűrő párok esetén, különböző  $\varphi$  szögek ( $\varphi = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  és  $90^\circ$ ) esetén, ha rájuk közönséges, polarizálatlan fénysugarat bocsátunk.

*Megjegyzés:* Feltételezhetjük, hogy a fenti esetekben a fény a polárszűrők felületére merőlegesen halad. A polárszűrők vastagsága valamint a felületükről visszaverődő fény elhanyagolható.

### 3. A csodálatos szénatom.

**A.** *A kovalens kötés több mint egy elektront tartalmaz. Két elektron csak akkor lehet ugyanabban a térrészben, ha ellentétes a spinjük. A kovalens kötés erősen irányított. A legegyszerűbb kovalens kötés a hidrogénmolekulában van, amely két protonból és két elektrontól áll.*

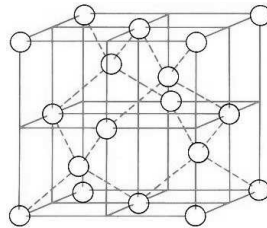
a) Készíts egy elektromos modellt a stacionárius hidrogénmolekulára a hidrogénatom Bohr-modelljének analógiájára.

b) Írd be a modellbe az elektron perdületének kvantálási feltételét az alapállapotban. Határozd meg a hidrogénmolekula geometriai paramétereit és a molekula kötési energiáját.

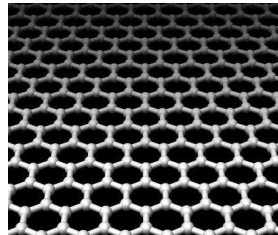
Hanyagold el a sugárzás okozta energiaveszteséget, és vedd figyelembe, hogy az elektron  $m_e$  tömege sokkal kisebb a proton  $m_p$  tömegénél. Tekintsd ismertnek a hidrogénatom első Bohr-sugarát ( $a = 0,533 \cdot 10^{-10}$  m) és a hidrogénre vonatkozó Rydberg-állandót ( $R_H = 13,6$  eV).

**B.** *A szén négy kovalens kötést tud képezni. Néha az atomoknak csak három közeli szomszédja van. Ilyenkor két szomszédhoz szimpla kovalens kötéssel, egyhez pedig dupla kovalens kötéssel kapcsolódik.*

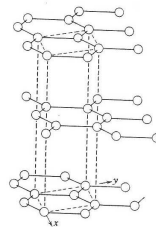
A gyémántban, melynek szerkezete az 1. ábrán látható, minden atom erősen kapcsolódik négy szomszédos atomhoz, melyek egy szabályos tetraéder csúcaiban helyezkednek el. Az összes atom egy hatalmas molekulát alkot. A másik lehetőség az, hogy a szénatomok három szomszédral hoznak létre kovalens kötést, így egy sík szerkezet jön létre, amit grafénnek nevezünk (2. ábra). Ha ilyen szerkezetek egymásra lapolódnak, grafit jön létre, melynek szerkezete a 3. ábrán látható.



1. ábra



2. ábra



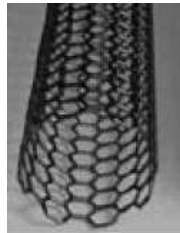
3. ábra

A grafitkristály a 4. ábrán látható rombuszalapú hasáb ismételt egymásmellé rakásával is felépíthető,  $\alpha\sqrt{3}$  élhosszal (ahol  $\alpha$  egy C–C kötés hossza), ami a 3. ábrán szaggatott vonal jelöl.

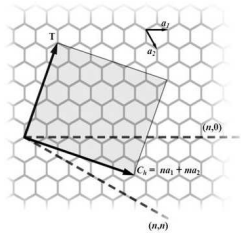


4. ábra

A szén nanocső (carbon nano tube CNT) egy szénatomokból álló üres henger, melynek fala egy feltekert grafén réteg, ahogy az 5. ábrán látható. A nanocső szerkezetének leírásához a kiralitási vektort használjuk (6. ábra):  $\vec{C}_n = n\vec{a}_1 + m\vec{a}_2$ , ahol  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$  a hatszöges rács elemi vektorai,  $n$ ,  $m$  pedig egész számok. A grafén úgy van feltekerve, hogy a  $\vec{C}_n$  kiralitási vektor hegye épp a kiindulási pontjába mutasson, míg a  $\vec{T}$  csavarási vektor párhuzamos a nanocső tengelyével. Az ilyen nanocsöveket mechanikai szenzorként lehet használni.



5. ábra



6. ábra

Ne felejtse el, hogy a kovalens kötések hossza két szénatom között a grafénben, a grafitban és a gyémántban is  $\alpha = 0,15$  nm, két grafénréteg távolsága a grafitban  $\beta = 0,34$  nm. A kötési energia a grafit vagy a gyémánt  $C-C$  szén kötésein  $\gamma = 3,6$  eV, a grafit  $C=C$  szén kötésein pedig  $\delta = 6,2$  eV. A szénatom tömege  $m_0 = 19,92 \cdot 10^{-27}$  kg, az Avogadro-szám  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  mol $^{-1}$ . Annak ismeretében, hogy szublimáció molhője (ami annak felel meg, hogy a szénatomok szabaddá válnak a kristályból) gyémántra  $E_{\text{subl}} = 716$  kJ · mol $^{-1}$ , határozd meg:

- c) a gyémánt sűrűségét és a grafit sűrűségét;
- d) a gyémánt és a grafit kovalens kötésekből származó kölcsönhatási energiáját. A gyémánt esetében hasonlítsd össze ezt az energiát a szublimációs molhővel, és magyarázd meg az eredményt.

**C.** Ha egy egyik végén befogott  $L$  hosszúságú és  $E$  Young-modulusú rúd szabad végére a rúdra merőleges irányban  $F$  nagyságú erő hat, akkor a rúd végének a lehajlását az  $a = -F \cdot L^3 / (3E \cdot J)$  képlet adja meg. A  $J$  keresztmetszeti másodrendű nyomaték definíciója  $J = \int_S y^2 dS$ , ahol  $y$  a  $dS$  elemi felületdarab távolsága a rúd neutrális zónájától (attól a síktól, ami nincs se összenyomva, se megnyújtva) és  $S$  a rúd keresztmetszete.

A szén nanocső hossza  $L = 500$  nm és királis vektora  $\vec{C}_n = 20\vec{a}_1 + 20\vec{a}_2$ . Annak ismeretében, hogy a grafén Young-modulusa  $E = 10^{12}$  Pa és a grafén sűrűsége  $\rho = 1900$  kg · m $^{-3}$  (a grafént tömör hengeres rúdnak tekintve) határozd meg:

- e) a szén nanocső (CNT) rezgésének sajátfrekvenciáját;
- f) annak a  $\Delta m$  tömegnek a nagyságát, amit a CNT szabad végére helyezve a frekvencia változása  $\Delta f = 20$  kHz.