I. rész

1. Mutassuk meg, hogy az $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ (ahol $x\neq 0$ valós szám) hozzárendeléssel megadott függvényre minden $a\neq 0$, $b\neq 0$ valós számpár esetén teljesül, hogy

$$f(a)+f(b)+2ab\cdot f(ab)=\frac{f(ab)}{f(a+b)}\,.$$

(*11 pont*)

2. A természetes számok sorozatából valamelyik számtól kezdve kiválasztjuk minden 12. számot addig, míg a kiválasztott számok összege 2010 lesz. A kiválasztott számok száma 10-nél több, de 100-nál kevesebb.

Melyik számot választottuk ki először és összesen hány darabot? (*12 pont*)

3. Mutassuk meg, hogy ha egy háromszög oldalaira teljesül az $a^2+b^2>5c^2$ egyenlőtlenség, akkor c a háromszög legkisebb oldala. (*14 pont*)

4. Van-e megoldása a $\sin^6 x+\sin^4 x+2\sin^2 x+\cos^2 x=4\sin^5 x$ egyenletnek a $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$-on? (*14 pont*)

II. rész

5. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget:

$$x^2\cdot\log_4(5x^2-2x-3)-x\cdot\log_{\frac{1}{4}}(5x^2-2x-3)\leq x^2+x. \qquad (\textit{16 pont})$$

6. A Stadion parkjában található „rúgófal” felső lyukába 10%, az alsóba 40% valószínűséggel talál be Márton.

a) Mindkét lyukra egyszer lőve mennyi a valószínűsége, hogy

A: egyszer sem talál;

B: egyszer talál?

b) Hányszor kell az alsó lyukra lőnie, hogy több mint 95% valószínűséggel legalább egyszer beletaláljon?

c) Mennyi a valószínűsége, hogy háromszor az alsóra, majd háromszor a felsőre lőve pontosan egyszer talál?

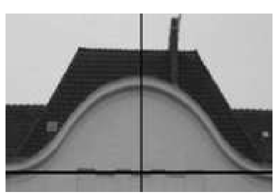
d) Krisztián észrevette, hogy Marci találati valószínűsége nem konstans. Találat után (az eredeti valószínűség) $\dfrac{1}{10}$ részével nő, ha nem talál, $\dfrac{1}{10}$ részével csökken az eredeti találati valószínűség. Marci kétszer lő az alsó lyukra. Mekkora a valószínűsége, hogy pontosan egyszer talál? (*16 pont*)

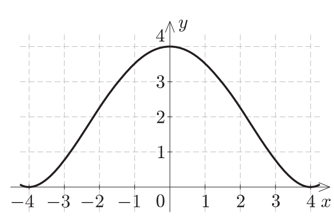
7. Adott a derékszögű koordinátarendszerben a $K(-2;3)$ középpontú $r=5$ sugarú kör és három pont: $A(6;2)$, $B(-3;5)$ és $C(-5;y_0)$, ahol $y_0>0$.

a) Mekkora a kör AB egyenesre illeszkedő húrjának hossza?

b) A C pont illeszkedik a körre. A kör C-ben húzott érintője legyen az e egyenes. Mekkora területű az a háromszög, amelyet az e egyenes, az y tengely és az AB egyenes fog közre? (*16 pont*)

8. Egy felújításra váró ház 8 m széles és 4 m magas oromzatát mutatja a mellékelt *ábra.* Az oromzat ívét leíró görbe érintője a végpontokban vízszintes. Az építész a görbét az $f(x)=ax^4+bx^2+c$ függvény grafikonjával szeretné megadni.

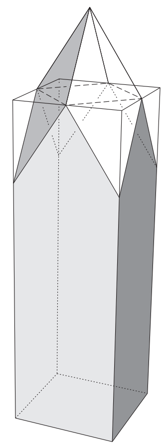




a) Határozzuk meg az $f(x)$ függvény hozzárendelési szabályában szereplő a, b és c konstansokat.

b) Minimum hány doboz festékre lesz szükség az oromzat kétszeri újrafestéséhez, ha 1 m^2-re 350 cm^3 festék szükséges, és 2 literes, 4 literes, illetve 5 literes kiszerelésben kapható a festék? (*16 pont*)

9. Architectos fejedelem három fiával és seregeivel elfoglalt egy várost. A városfal három sarkán három egyforma négyzetes oszlop alakú torony állt, melyek alapéle 8 m, magasságuk 40 m volt. A győzelem emlékére a három fiú a három tornyot átalakíttatta. Mindhárom átépítés nagyon hasonló volt egymáshoz. Az eredeti tornyok fedőlapjainak szomszédos élfelezőpontjait összekötő szakaszok mentén levágtak négy egyforma sarkot. Ezeket a megmaradt fedőlapra ültették az ábrának megfelelően úgy, hogy az új toronytető egymáshoz kapcsolódó rombuszokból állt.



A legidősebb fiú tornyának felszíne nem változott az átépítés után.
A középső fiú úgy végezte el az átalakítást, hogy a torony teljes felszíne a lehető legkisebb lett.
A legfiatalabb fiú tornyán a szomszédos tetősíkok 120°-os szöget zártak be.
Adjuk meg az átépített tornyok magasságát. (*16 pont*)