

## I. rész

1. Határozzuk meg a következő kifejezések pontos értékét:

$$a = \lg 1000^{2007} + \lg 0,001^{2007};$$

(2 pont)

$$b = (2005! + 2006!) \left( \frac{1}{2006!} - \frac{1}{2007!} \right);$$

(4 pont)

$$c = \left( \frac{2}{\sqrt{2007} - 1} \right) \left( \frac{1}{1 + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2005} + \sqrt{2007}} \right).$$

(5 pont)

**Megoldás.**

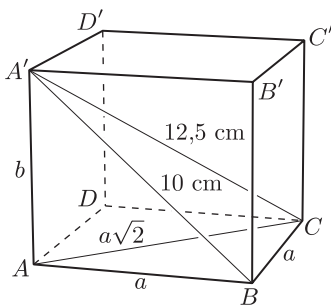
$$a = \lg 1000^{2007} + \lg 0,001^{2007} = 2007(\lg 1000 + \lg 0,001) = 2007(3 - 3) = 0.$$

$$b = (2005! + 2006!) \left( \frac{1}{2006!} - \frac{1}{2007!} \right) = 2005!(1 + 2006) \frac{2007 - 1}{2007!} = 1.$$

$$\begin{aligned} c &= \frac{2}{\sqrt{2007} - 1} \cdot \left( \frac{1}{1 + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2005} + \sqrt{2007}} \right) = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2007} - 1} \cdot \left( \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} + \dots + \frac{\sqrt{2007} - \sqrt{2005}}{2} \right) = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2007} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2007} - 1}{2} = 1. \end{aligned}$$

2. Egy négyzet alapú egyenes hasáb (négyzetes oszlop) egy oldallapjának átlója 10 cm, a testátlója 12,5 cm. Mekkora a hasáb felszíne és térfogata? (12 pont)

**Megoldás.** Készítsünk ábrát.



Az  $ABA'$  és  $ACA'$  derékszögű háromszögekben:

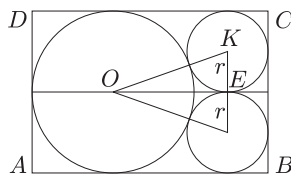
$$a^2 + b^2 = 100, \quad 2a^2 + b^2 = 156,25.$$

Ebből  $a = 7,5$  cm,  $b \approx 6,614$  cm.

$$V = a^2 b \approx 372,04 \text{ cm}^3.$$

$$A = 2a^2 + 4ab \approx 310,9 \text{ cm}^2.$$

3. Egy téglalap alakú parkban az ábra szerint három egymást és a téglalap oldalait érintő kör alakú virágágyást, valamint a park kerületén, a körök mentén, és a körök középpontjaira illeszkedő, az ábrára berajzolt összes vonal mentén utakat létesítettek. A két kisebb, egyenlő méretű ágyás sugara  $r = 15$  m.



- a) Mekkora a nagy kör sugara? (2 pont)  
 b) Milyen hosszú a teljes úthálózat? (8 pont)  
 c) Hány százalékát tölti ki a három kör az egész téglalap területének? (4 pont)

**Megoldás.** a) A nagy kör sugara kétszerese a kis kör sugarának, tehát  $R = 30$  m.

b) Használjuk az ábra jelöléseit. Az úthálózathoz a két kis kör  $E$  érintkezési pontjának és a nagy kör  $O$  középpontjának távolságát kell meghatároznunk. Az  $OKE$  derékszögű háromszögben  $OK = r + R = 45$  m.

$$OE = \sqrt{45^2 - 15^2} = \sqrt{1800} \approx 42,4 \text{ m.}$$

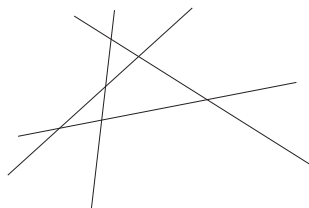
Így a téglalap hosszabbik oldala:  $30 + 42,4 + 15 \approx 87,4$  m. A teljes úthálózat hossza:

$$\begin{aligned} 3AB + 2BC + 2OK + 2KE + 2R\pi + 2 \cdot 2r\pi = \\ = 3 \cdot 87,4 + 2 \cdot 60 + 2 \cdot 45 + 30 + 60\pi + 2 \cdot 30\pi \approx 879,2 \text{ m.} \end{aligned}$$

- c) A három kör területe:  $R^2\pi + 2r^2\pi = 4241 \text{ m}^2$ , a téglalapé:  $60 \cdot 87,4 = 5244 \text{ m}^2$ .  
 A körök területe kb. 80,9%-a a téglalap területének.

4. Adott a síkban 10 általános helyzetű egyenes. (Nincs köztük két párhuzamos, és bármely metszésponton csak két egyenes halad át.)

- a) Hány metszéspontja van a 10 egyenesnek? (2 pont)  
 b) Hány egymást nem fedő szakaszt, és hány félegyeneset számolhatunk össze a 10 egyenesen? (5 pont)  
 c) Véletlenszerűen kiválasztunk a keletkező egyenesdarabok (szakaszok és félegyenesek) közül kettőt. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott két egyenesdarab azonos típusú lesz? (Mindegyik szakasz, vagy mindegyik félegyenes.) (8 pont)



(Pl. ezen az ábrán 4 általános helyzetű egyenesnél 6 metszéspontot, 8 szakaszt és 8 félegyeneset, azaz 16 egyenesdarabot számolhatunk össze.)

**Megoldás.** a) Bármely két egyenes meghatároz egy metszéspontot, ezért  $\binom{10}{2} = 45$  metszéspont van.

b) Minden egyeneset 9 másik metsz, és a 9 metszéspont között 8 szakasz és a két „végén” 1-1 félegyenes van. Tehát 80 szakaszt és 20 félegyeneset számolhatunk össze.

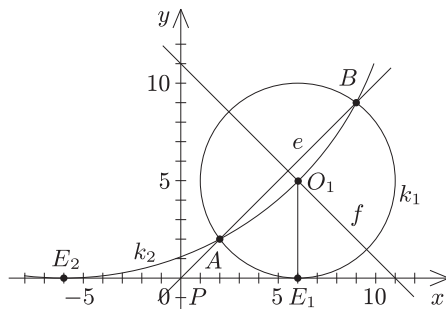
c) 100 egyenesdarab közül két egyenesdarabot  $\binom{100}{2}$ , két szakaszt  $\binom{80}{2}$ , két félegyeneset  $\binom{20}{2}$ -féleképpen választunk ki.

Tehát annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott két egyenesdarab azonos típusú lesz:

$$\frac{\binom{80}{2} + \binom{20}{2}}{\binom{100}{2}} = \frac{\frac{80 \cdot 79}{2} + \frac{20 \cdot 19}{2}}{\frac{100 \cdot 99}{2}} = \frac{6700}{9900} = \frac{67}{99} = 0,67.$$

5. Adott a koordinátarendszerben az  $A(2;2)$  és  $B(9;9)$  pont. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely illeszkedik az  $A$  és  $B$  pontokra és érinti az  $x$  tengelyt. (16 pont)

**I. megoldás** (paraméteres). Legyen a keresett kör középpontja  $O(u;v)$ . Mivel a kör érinti az  $x$  tengelyt, azért sugara  $v$ , egyenlete:  $(x-u)^2 + (y-v)^2 = v^2$ .  $O$  illeszkedik az  $AB$  szakasz felező merőlegesére,  $f$ -re:  $f: x+y=11$ , így  $u+v=11$ , ebből  $u=11-v$ .



$A(2;2)$  a kör egy pontja:  $(2-u)^2 + (2-v)^2 = v^2$ . Beírva  $u$ -t:

$$[2 - (11 - v)]^2 + (2 - v)^2 = v^2.$$

Ebből:  $v_1 = 5$  és  $v_2 = 17$ . Ezekhez:  $u_1 = 6$  és  $u_2 = -6$ .

Két kört kapunk, amelyek egyenlete:

$$(x-6)^2 + (y-5)^2 = 25 \quad \text{és} \quad (x+6)^2 + (y-17)^2 = 289.$$

**II. megoldás** (a szerkesztés menetét követve). Az  $AB$  egyenes a  $P(0;0)$  pontban metszi az  $x$  tengelyt. A  $P$  pontból a körhöz húzott érintőszakasz hossza mértani közepe a pontból húzott szelő két darabjának,  $PA$ -nak és  $PB$ -nek:

$$PE^2 = PA \cdot PB = 2\sqrt{2} \cdot 9\sqrt{2} = 36.$$

Így  $P$ -ből mindkét irányba fel kell mérnünk az  $x$  tengelyre a  $PE = 6$  hosszúságú szakaszt. Így kapjuk a két érintési pontot:  $E_1(6;0)$  és  $E_2(-6;0)$ .

A két középpont második koordinátáit az  $f: x+y=11$  egyenletből kaphatjuk:  $v_1 = 5$  és  $v_2 = 17$ .

A két kör egyenlete:  $(x-6)^2 + (y-5)^2 = 25$  és  $(x+6)^2 + (y-17)^2 = 289$ .

**III. megoldás** (mértani helyekkel). Az  $A(2;2)$  pontra illeszkedő és  $x$  tengelyt érintő körök középpontjai egyenlő távolságra vannak  $A$ -tól és az  $x$  tengelytől, ezért ezek mértani helye az  $A$  fókuszú,  $x$  tengely vezéregyenesű parabola, amelynek egyenlete:

$$y = \frac{1}{4}(x-2)^2 + 1.$$

Ugyanígy a  $B(9;9)$  pontra illeszkedő és  $x$  tengelyt érintő körök középpontjainak mértani helye az  $y = \frac{1}{18}(x-9)^2 + 4,5$  egyenletű parabola.

A két parabola metszéspontjai lesznek a keresett középpontok:  $O_1(6;5)$  és  $O_2(-6;17)$ .

A két kör egyenlete:  $(x-6)^2 + (y-5)^2 = 25$  és  $(x+6)^2 + (y-17)^2 = 289$ .

6. Írjuk fel a páratlan természetes számokat a következő háromszög alakú táblázatba úgy, hogy minden sorban eggyel több szám szerepeljen, mint az előzőben:

		1		
		3	5	
	7	9	11	
13	15	17	19	
21	23	...		

a) Melyik szám áll a 20. sor elején? (3 pont)

b) Adjuk meg  $n$  függvényében, hogy melyik szám áll az  $n$ -edik sor elején, a végén, és mennyi a sorban szereplő számok összege. (6 pont)

c) Mennyi lesz a számok összege abban a sorban, amelyben a 2007-es szám szerepel? (3 pont)

d) Az első 100 sorból kiválasztunk véletlenszerűen egyet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a választott sorban a számok összege négyzetszám? (4 pont)

**Megoldás.** a) Az egyes sorokban rendre  $1, 2, 3, \dots, 19, 20$  db szám szerepel, azaz a sor elején levő számok közötti különbség rendre 2-vel nő. Így a 20. sor elején az

$$1 + 2 + 4 + 6 + \dots + 19 \cdot 2 = 1 + \frac{(2 + 38) \cdot 19}{2} = 381$$

szerepel.

b) Az egyes sorokban rendre  $1, 2, 3, \dots, n$  db szám szerepel, így az  $n$ . sor elején az

$$1 + 2 + 4 + 6 + \dots + 2(n-1) = 1 + \frac{(2 + 2(n-1)) \cdot (n-1)}{2} = n^2 - n + 1$$

szám áll.

Az  $n$ -edik sorban álló  $n$  szám 2 differenciájú számtani sorozatot alkot, ezért a sor végén az elsőnél  $2(n-1)$ -gyel nagyobb szám, azaz az  $n^2 + n - 1$  szerepel.

Az  $n$ -edik sorban álló  $n$  szám összege:

$$S_n = \frac{[(n^2 - n + 1) + (n^2 + n - 1)]n}{2} = n^3.$$

c) Azt kell meghatároznunk, hogy melyik sorban szerepel a 2007, azaz melyik a legkisebb  $n$ , amelyre  $2007 \leq n^2 + n - 1$ . A  $44^2 + 44 - 1$  még csak 1979, de a  $45^2 + 45 - 1 = 2069$ , tehát 2007 a 45. sorban szerepel. Ebben a sorban a számok összege:  $45^3 = 91\,125$ .

d) Azt keressük, hogy az első 100 köbszám közül melyek négyzetszámok. Ezek a hatodik hatványok:  $1^6, 2^6, 3^6, \dots, 10^6$ . Tehát a keresett valószínűség:  $P = \frac{10}{100} = 0,1$ .

7. a) Milyen valós  $x$ -ek elégítik ki a  $4^{x+1} - 13 \cdot 6^x + 9^{x+1} = 0$  egyenletet? (7 pont)

b) Milyen  $[0^\circ; 180^\circ]$  intervallumba eső  $x$  szögek elégítik ki a következő egyenletet? (9 pont)

$$2 \sin^2 x + 13 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 6. \quad (9 \text{ pont})$$

**Megoldás.** a) Az egyenlet így is írható:

$$4 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 9 \cdot 9^x = 0.$$

Minden tag másodfokú a  $2^x$ , illetve a  $3^x$  változókra. Ilyenkor célszerű mindkét oldalt elosztani az egyik másodfokú kifejezéssel, pl.  $9^x$ -nel. Mivel ez nem lehet 0, így az eredetivel ekvivalens egyenlethez jutunk:

$$4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 13 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 9 = 0.$$

Az  $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$  jelöléssel:

$$(*) \quad 4y^2 - 13y + 9 = 0.$$

Ennek gyökei:  $y_1 = 1$  vagy  $y_2 = \frac{9}{4}$ . Ebből kapjuk:  $x_1 = 0$  vagy  $x_2 = -2$ .

Minden lépés ekvivalens átalakítás volt, ezért a kapott számok megoldásai az egyenletnek.

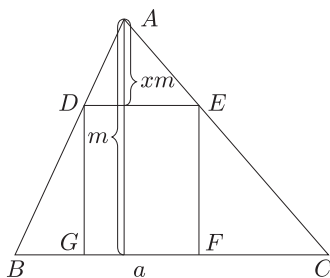
b) Írjunk a jobb oldalon 6 helyére  $(6 \sin^2 x + 6 \cos^2 x)$ -et, és redukáljuk 0-ra:

$$0 = 4 \sin^2 x - 13 \sin x \cos x + 9 \cos^2 x.$$

Osszuk el mindkét oldalt  $\cos^2 x$ -szel. Mivel  $\cos^2 x$  zérushelyei nem megoldások, így az eredetivel ekvivalens egyenlethez jutunk:  $0 = 4 \operatorname{tg}^2 x - 13 \operatorname{tg} x + 9$ .

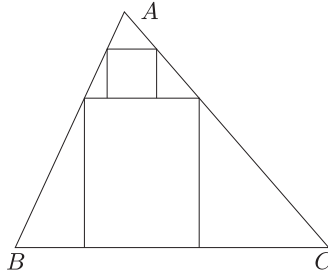
Az  $y = \operatorname{tg} x$  jelöléssel az a) feladat (\*) egyenletét kapjuk. Abból pedig az  $x_1 = 45^\circ$  vagy az  $x_2 = 66,04^\circ$  gyököt kapjuk. Most is minden lépés ekvivalens átalakítás volt, ezért a kapott szögek a megoldások.

8. A  $T$  területű  $ABC$  hegyesszögű háromszögbe írjunk téglalapot az 1. ábra szerint.



1. ábra

- a) Az  $ADE$  háromszög  $A$ -ból induló magassága  $x$ -szerese az  $ABC$   $A$ -ból induló  $m$  magasságának ( $0 < x < 1$ ).  
 Fejezzük ki az  $ADE$  háromszög és a  $DEFG$  téglalap területét  $T$  és  $x$  segítségével. (4 pont)
- b) Legfeljebb hányad részét tölti ki a téglalap az  $ABC$  háromszög területének? (5 pont)
- c) Legfeljebb hányad részét tölti ki a 2. ábra szerint berajzolt két téglalap az  $ABC$  háromszög területének? (7 pont)



2. ábra

**Megoldás.** a) Az  $ADE$  háromszög hasonló az  $ABC$  háromszöghöz, és a hasonlóság aránya  $x$ , ezért:  $t_{ADE\Delta} = x^2 \cdot T$ .  
 $DE = xa$ ,  $DG = (1 - x)m$ , ezért  $t_{DEFG} = xa(1 - x)m = x(1 - x)2T$ .

b)

$$x(1 - x) = x - x^2 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}.$$

Ennek maximuma  $\frac{1}{4}$ , ha  $x = \frac{1}{2}$ .

Ezért  $t_{DEFG} = x(1 - x)2T$  maximuma  $\frac{T}{2}$ , ha  $x = \frac{1}{2}$ . Tehát a téglalap legfeljebb a háromszög területének felét töltheti ki, ha a téglalap magassága éppen a háromszög magasságának fele.

c) Ha a fenti jelölések szerint osztjuk a magasságot, akkor az alsó téglalap területe  $x(1 - x)2T$ .

A felső téglalap területe, mint az előző pontban láttuk, legfeljebb az  $ADE$  háromszög területének fele lehet, tehát  $\frac{1}{2}x^2T$ . Keressük tehát a

$$t_1 + t_2 = \left[2x(1 - x) + \frac{1}{2}x^2\right] T = \left[-\frac{3}{2}\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}\right] T$$

maximumát.

Látható, hogy ennek a maximuma  $\frac{2}{3}T$ , ha  $x = \frac{2}{3}$ .

Tehát a két téglalappal a háromszög területének maximum a kétharmadát tudjuk kitölteni, ha mindkét téglalap magassága harmadrésze a háromszög magasságának.

*Megjegyzés.* Hibás az a megoldás, hogy az első téglalapot válasszuk a lehető legnagyobbak,  $\frac{1}{2}T$ -nek aztán a másodikat megint a lehető legnagyobbak,  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}T = \frac{1}{8}T$ -nek, mert így csak  $\frac{5}{8}T$ -t kapunk, ami kisebb, mint  $\frac{2}{3}T$ .

**9. Melyek azok az  $n$  természetes számok, amelyekre teljesül a következő két feltétel?**

– Az  $\frac{1}{n}$  tizedes tört alakja véges.

– Az  $n^2$ -nek háromszor annyi pozitív osztója van, mint az  $n$ -nek. (16 pont)

**Megoldás.** Az  $\frac{1}{n}$  tizedes tört alakja véges, ha  $n$  törzstényezős alakjában 2-n és 5-ön kívül más törzstényező nem szerepel:  $n = 2^x \cdot 5^y$  ( $x, y \in \mathbb{N}$ ).

Az  $n$  osztóinak száma:  $d(n) = (x + 1)(y + 1)$ , az  $n^2 = 2^{2x}5^{2y}$  osztóinak száma:  $d(n^2) = (2x + 1)(2y + 1)$ .

$$3(x + 1)(y + 1) = (2x + 1)(2y + 1); \quad xy - x - y - 2 = 0; \quad (x - 1)(y - 1) = 3.$$

Az  $x \geq 0, y \geq 0$  miatt csak  $x = 2, y = 4$  vagy  $x = 4, y = 2$  lehet. Azaz  $n = 2^2 \cdot 5^4 = 2500$ , vagy  $n = 2^4 \cdot 5^2 = 400$ .

A 2500 és a 400 is megfelel a feltételeknek.