# I. rész

**1.** Az egymástól 24 km távolságra lévő $A$ és $B$ városból egyszerre indul egymással szembe két gépkocsi. Találkozásuk után 4 perccel az a gépkocsi, amelyik a $B$ városból indult, megérkezik az $A$ városba, a másik pedig a találkozás után 16 perccel a $B$ városba. Határozzuk meg a gépkocsik sebességét. (*11 pont*)

**2.** *a*) 1000 almát úgy akarunk $k$ ($k \geq 2$) tanuló között szétosztani, hogy az első tanuló kapjon $x$ almát és minden további tanuló rendre 3-mal kevesebbet mindaddig, míg az 1000 almát maradéktalanul ki nem osztottuk.

Hány tanulóról lehet szó? Hány alma jut ekkor az utolsó tanulónak?

*b*) Legközelebb 16 ember között az 1000 almát úgy szeretnénk elosztani, hogy az első 11 embernek egyforma számú almát adjunk, de ezt követően 50%-kal mindig többet, mint az előzőnek. Ekkor a végén marad még 15 alma. Az egyes emberek által kapott almák számát feljegyezzük, s így kapunk 16 adatot.

Mennyi az így kapott adatok átlaga és módusza? (*12 pont*)

**3.** Oldjuk meg a következő egyenleteket:

*a*) $\dfrac{x^2+2x+1}{\sqrt{(x+1)^2}}+x+1=0$;

*b*) $10^{\lg 3x}=2x-3$;

*c*) $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+5}=\sqrt{x^2+4x-5}$;

*d*) $\sqrt{1-\sin^2 x}\cdot \operatorname{tg} x=\sin x$. (*14 pont*)

**4.** Egy paralelogramma egyik átlójának hossza egy bizonyos szög szinuszával, a másik ugyanennek a szögnek a koszinuszával, míg a rövidebbik oldala a szög kétszeresének szinuszával egyenlő. A két átló által bezárt szög $60^\circ$.

Számoljuk ki a paralelogramma oldalhosszainak pontos értékét. (*14 pont*)

# II. rész

**5.** Egy biológushallgató két tárgylemez közt lévő vizes közeget figyel mikroszkóppal, amely egy 0,9 mm oldalú négyzet alakú területet foglal el. Ezen négyzet oldalainak harmadával megegyező oldalhosszúságú, 9 négyzetből álló négyzethálót vetít rá a látótérre, amely sakktáblaszerűen szürkével és fehérrel színezett úgy, hogy a bal alsó sarok szürke. Legyen két eseményünk az, hogy amikor először a mikroszkópba néz, akkor egy pontszerű baktériumot

$A$: fehér négyzetben lát.

$B$: a közeg négyzetének bal oldalához közelebb látja, mint az alsó oldalához.

*a*) Számítsuk ki a $P(A)$, $P(B)$, $P(\overline{A}\cdot B)$ valószínűségeket.

*b*) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy 0,01 mm sugarú gömb alakú porszemet úgy pillant meg, mintha a porszemnek lenne valamelyik szürke négyzettel közös pontja? (A porszemet a mikroszkópban egy 0,01 mm sugarú körlapnak látjuk, és az elhelyezkedése véletlenszerű a megfigyelt közegben.) (*16 pont*)

**6.** *a*) Tekintsük azokat az ötjegyű számokat, amelyekre igaz, hogy utolsó három számjegyük különböző, ezen számjegyek összege 5 és közülük egyik se prímszám. Mennyi ezek közül a 8-cal oszthatók összege?

*b*) Tekintsük az összes olyan $n$ pozitív egész számot, amelyre $n!+3$ négyzetszám. Hány ilyen négyzetszám van? (*16 pont*)

**7.** Az $A(-2;0)$ és a $B(2;0)$ pont egy derékszögű háromszög átfogójának két végpontja.

*a*) Határozzuk meg a harmadik csúcspont koordinátáit, ha az $A$ csúccsal szemközti befogó hossza 2.

*b*) A $B$ középpontú 2 sugarú kör egy olyan háromszög beírható köre, amelynek egyik csúcspontja az $A$ pont, és az $A$ ponttal szemközti oldal az $E\big(2+\sqrt{3};1\big)$ pontban érinti a kört. Határozzuk meg e háromszög másik két csúcspontjának koordinátáit.

*c*) Mekkorák a keresett háromszög szögei? (*16 pont*)

**8.** Egy egyenes körkúp felszínét, térfogatát és a beírt gömbjének felszínét jelölje sorra $A$, $V$ és $G$. Igazoljuk, hogy $A^2G=36\pi\cdot V^2$. (*16 pont*)

**9.** Legyen adva a valós számokon értelmezett $f(x)=x-\dfrac{2}{3}x^3$ függvény.

*a*) A $[-2;1]$ intervallum mely $x$ értékei esetén veszi fel ez a függvény a maximális, illetve a minimális értékét? Mekkorák ezek az értékek?

*b*) Ezen az intervallumon hol lesz a grafikonhoz húzott érintő párhuzamos a $g(x)=-3x+2007$ függvény grafikonjával?

*c*) Mi lehet a $h(x)$ függvény hozzárendelési szabálya, ha

$$h\big(f(x)\big)=\sqrt[3]{x-\frac{2}{3}x^3}\ ?$$

Határozzuk meg az $f\big(h(x)\big)$ összetett függvényt. (*16 pont*)