Új matematikafeladatokat kitalálni nem könnyű. Aki próbált már matekversenyt rendezni, szép és nehéz feladatokat kitalálni, tapasztalhatta. A különböző versenybizottságok tagjai rendszeresen szembe kell nézzenek a problémával: közeleg a verseny vagy a lapzárta, és már megint nincs elég feladat.

Természetesen más országok versenyeinek feladatait is felhasználhatjuk, bár ez ma már egyre nehezebb. A feladatokat a versenyzők is ismerhetik, illetve megtalálják az interneten. Előfordul, hogy a feladatok állítását általánosítjuk, vagy csak egy speciális esetet adunk fel, hogy lehetőleg az se ismerjen rá, aki kitalálta. (Egyes vélemények szerint valamikor az ókorban valaki kitalált öt feladatot, és azóta ezeknek a különböző változatait adjuk fel újra és újra.) De a saját feladatainkkal is gyakran összetalálkozhatunk más versenyeken és internetes fórumokon.

Tavaly nyáron *Svetoslav Savchevtől,* a Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatkiválasztó bizottságának bolgár tagjától hallottam egy érdekes történetet. (Az esetet Svetoslav Savchev és Titu Andreescu megírták *Mathematical Miniatures* c. könyvükben [1].)

Az 1983. évi Kürschák-versenyen szerepelt a következő feladat:

> *Adott a síkon $n+1$ pont, P_1, P_2, ..., P_n és Q, amelyek közül semelyik három nincs egy egyenesen. Tudjuk, hogy bármelyik két különböző P_i, P_j ponthoz található olyan P_k pont, hogy Q a $P_iP_jP_k$ háromszög belsejében van. Mutassuk meg, hogy n páratlan szám.*

A feladatnak több megoldása is ismert, ezeket elolvashatjuk Surányi János cikkében [2]. Itt most csak annyit szeretnék kiemelni, hogy az állítás bizonyos értelemben éles: bármely páratlan $n \geq 3$-hoz léteznek a feltételeknek megfelelő $P_1, P_2, \ldots, P_n$ és Q pontok. Például ilyen rendszert kapunk, ha $P_1P_2\ldots P_n$-t egy szabályos n-szögnek választjuk, aminek Q a középpontja. Sőt – bár ez már inkább az Olvasó fárasztásának kategóriájába tartozik –, a feltétel $n=1$ esetén is teljesül, ugyanis ha valaki mutat két különbözőt az egy szem P_1 pont közül, mi biztosan találni fogunk hozzájuk megfelelő harmadikat. ;-)

Valószínűleg a Kürschák-feladat ihlette az 1984-es Bolgár Matematikai Olimpia szervezőit, akik a verseny utolsó fordulójában a következő feladatot tűzték ki:

> *Adott a térben $n+1$ pont ($n \geq 4$), $P_1, P_2, \ldots, P_n$ és Q úgy, hogy közülük semelyik négy nincs egy síkon. Tudjuk, hogy bármely három különböző P_i, P_j és P_k ponthoz található legalább egy olyan P_ℓ pont, amelyre Q a $P_iP_jP_kP_\ell$ tetraédernek belső pontja. Mutassuk meg, hogy n páros.*

A pontokat a P_n pontból egy alkalmas síkra vetítve, a térbeli feladat állítását könnyen visszavezethetjük a síkbeli esetre. Lényeges különbség azonban – és ez feltehetően elkerülte a versenybizottság figyelmét –, hogy nem létezik minden egyes páros $n \geq 4$-hez megfelelő pontrendszer. Egy, a versenyen résztvevő tizedik osztályos diák, *Ivan Dimitrov* vette észre és bizonyította be, hogy az állításnál jóval több is igaz: a feltétel kizárólag akkor teljesül, ha $n=4$, és Q a $P_1P_2P_3P_4$ tetraéder belsejében fekszik.

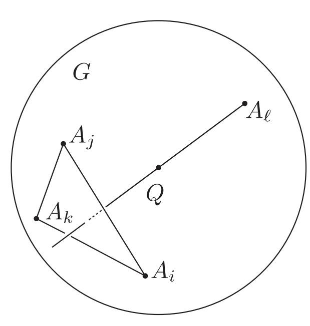
A szeptemberi **A. 458.** feladat kísérlet volt; Svetoslav Savchev javaslatára a KöMaL pontversenyben is kitűztük a térbeli feladatot. (A szövegből véletlenül kimaradt az $n \geq 4$ feltétel, így az $n=1$ és $n=2$ esetek is lehetségesek.) A feladatot végül hat versenyzőnk oldotta meg – ennyien bizonyították, hogy $n \geq 4$ esetén n páros –, de közülük csak ketten (*Nagy Donát,* Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimn. és Ált. Isk., 10. évf., és *Tomon István,* Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. évf.) mutatták meg azt is, hogy $n \leq 4$.

Következzen tehát az **A. 458.** feladat megoldása Nagy Donát dolgozata alapján.

Megmutatjuk, hogy csak $n=1$, $n=2$ és $n=4$ lehetséges, ezekhez az értékekhez könnyen található is megfelelő pontrendszer. Ha $n \geq 3$, akkor a feltétel szerint a P_1, P_2, P_3 pontokhoz találhatunk egy negyedik P_ℓ-et is (amelyre az is igaz, hogy Q a $P_1P_2P_3P_\ell$ tetraéder belső pontja), tehát az $n=3$ eset nem lehetséges.

A továbbiakban feltételezzük, hogy $n \geq 4$.

Vegyünk fel egy Q középpontú G gömböt, és jelöljük A_i-vel a QP_i félegyenes és G metszéspontját ($1 \leq i \leq n$). Abból a feltételből, hogy a $P_1, P_2, \ldots, P_n, Q$ pontok közül semelyik négy nincs egy síkban, következik, hogy az $A_1, \ldots, A_n$ pontok közül semelyik három nincs egy síkban Q-val. Továbbá, tetszőleges $P_iP_jP_kP_\ell$ tetraéder pontosan akkor tartalmazza a belsejében Q-t, ha az $A_iA_jA_kA_\ell$ tetraéder is a belsejében tartalmazza Q-t. Emiatt bármely három különböző A_i, A_j, A_k ponthoz található legalább egy olyan A_ℓ pont, amelyre Q az $A_iA_jA_kA_\ell$ tetraéder belső pontja.



Legyen K az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontok konvex burka. Mivel az $A_1, \ldots, A_n$ pontok a G gömbön fekszenek, mindegyikük csúcsa K-nak; a K konvex poliédernek pontosan ez az n csúcsa van. Többnyire K lapjai háromszögek, de előfordulhat, hogy valamelyik lapnak több oldala van; az ilyen lapokat néhány átló behúzásával osszuk fel háromszögekre. (Azt is megtehetjük, hogy az $A_1, \ldots, A_n$ pontokat egy kicsit elmozdítjuk, hogy semelyik négy ne essen egy síkra.)

Jelöljük az így kapott „háromszöglapok” és „élek” számát L-lel, illetve E-vel. Az Euler-féle poliédertétel szerint $n+L=E+2$. Minden háromszöglapot három él határol, és minden él két háromszöglapot választ el, így azt is tudjuk, hogy $2E=3L$. A két összefüggésből E-t eliminálva, $3L = 2E = 2(n+L-2) = 2n+2L-4$, azaz

$$L = 2n - 4. \tag{1}$$

Tetszőleges $A_iA_jA_k$ háromszöglaphoz van legalább egy olyan A_ℓ pont, amelyre Q az $A_iA_jA_kA_\ell$ tetraéder belső pontja. Ekkor az $A_\ell Q$ egyenes az $A_iA_jA_k$ háromszög síkját az $A_iA_jA_k$ háromszöglap egy belső B pontjában döfi át. Mivel P konvex poliéder, az $A_\ell Q$ félegyenes csak egy háromszöglapot döfhet, és a különböző $A_iA_jA_k$ háromszöglapokhoz más és más A_ℓ pontok tartoznak. Ebből következik, hogy legalább annyi A_ℓ pont van, mint háromszöglap, vagyis

$$L \le n. \tag{2}$$

Az (1) és (2) egyenlőtlenségek összevetéséből kapjuk, hogy $n \le 4$.

Felhasznált irodalom

[1] Svetoslav Savchev, Titu Andreescu: *Mathematical Miniatures.* Mathematical Association of America, 2003; ISBN 088385645X, 9780883856451.
http://books.google.hu/books?id=H379KAQI6acC
37. fejezet (Tetrahedra with a Point in Common), 152–154. oldal.

[2] Surányi János: *Az 1983. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatainak megoldása,* KöMaL 1984/2, 51–60.