Alapfeladat. *A Nagyáruház előtti parkolóban szeretnénk parkolóhelyet találni lehetőleg minél közelebb a bejárathoz úgy, hogy nem tudva, vannak-e még a bejáratig üres helyek, a parkolóhelyek mellett haladva eldönthetjük, hogy beállunk-e az üres helyre vagy továbbmegyünk. Ha továbbmentünk, vissza már nem fordulhatunk. Mindezt a folyamatot a lehető legrövidebb idő alatt akarjuk végrehajtani. Mi a legjobb stratégia?*

Cikkünkben igyekszünk behatolni abba a szemléletmódba, amikor egy folyamatot adott pillanatokban feljegyzett állapotának változásával/változásaival, vagy néhány, egymást követő állapot egymáshoz való viszonyának segítségével (rekurzió) írjuk le. Például a bankszámlámon tartott pénzem kamatozik, mely kamatot a bank naponta jóváírja: ha ma $f_0 = 10\,000$ Ft-om van, a napi kamat 0,02%, akkor holnap $f_1 = f_0 \cdot 1{,}0002 = 10\,002$ Ft-om lesz (rekurzió). Másként megfogalmazva, a pénzem naponta az előző napi összeg 0,0002-szeresével nő: $f_1 - f_0 = 0{,}0002 f_0$ (differencia-egyenlet). Azaz a kezdeti lépéseket kívánjuk megtenni a felé, hogy a *differencia-egyenlettel megadott folyamatok állapotait ki tudjuk számolni egyszerűbb esetekben közvetlenül – az egyenlet megoldásával; példánkban megmondhatjuk, hogy két hét múlva mennyi pénzünk lesz* ($f_{13} = f_0 \cdot 1{,}0002^{13} = 10\,026$ Ft).

Egy folyamat azonos időközönként mért állapotait jelöljük s_k-val ($k = 0, 1, 2, \dots$), például jódizotópok számát a megfigyelés kezdetétől eltelt k-adik napon. Legyen a differencia, azaz változás jele Δ: $(\Delta s)_k = s_{k+1} - s_k$. A változás változását, majd azok változását stb. is értelmezhetjük, így *n-ed rendű differenciának* nevezzük azt az s-ből képzett $\Delta^n s$ sorozatot, amelynek k-adik tagja

$$(\Delta^n s)_k = \left(\Delta^{n-1} s\right)_{k+1} - \left(\Delta^{n-1} s\right)_k.$$

1. Delta 1

A legegyszerűbb egyenlet a jó öreg *számtani sorozatról* szól:

(1)
$$(\Delta s)_k = s_{k+1} - s_k = d,$$

ahol d egy adott szám. Ha $d = 0$, akkor a sorozat konstans-sorozat. Ha $d \neq 0$, akkor az egyenlet megoldása: $s_k = s_0 + k \cdot d$. Általánosíthatjuk is (1)-et például az

$$\alpha s_{k+1} - \beta s_k = \gamma$$

egyenletre, ami picit más alakban írva:

$$\alpha(s_{k+1} - s_k) + (\alpha - \beta) s_k = \gamma$$

(α, β, γ adott számok). Ezekben az egyszerű esetekben célszerű a sorozat első néhány tagjának felírásával megsejteni a tetszőleges k-adik tagra vonatkozó képletet.

1. feladat. *Szeretném a* 2 m *hosszú,* 2 cm *vastagra lapított hálózsákomat összegöngyölve belepréselni a zsákjába. Belefér-e, ha a (henger alakú) zsák keresztmetszetének átmérője* 22 cm?

Amíg az együtthatók adott konstansok és $\gamma = 0$, a feladatok ebben és a későbbi fejezetekben is megoldhatóak a *lineáris rekurzív sorozatok* elméletének segítségével (l. a 2.1. fejezetben).

Írjuk föl differenciával az első általánosítást:

(2)
$$\Delta s = (q - 1)s + c,$$

ahol $\dfrac{\beta}{\alpha} := q$ és $\dfrac{\gamma}{\alpha} := c$ ($\alpha \neq 0$).

A $\gamma = c = 0$ esetben ismét egy ismerőssel találkozunk:

$$s_{k+1} = s_k + \Delta s_k = q \cdot s_k = s_0 \cdot q^{k+1}$$

mértani sorozat – pénzügyi szemmel pedig az, ha a számlánkra betett pénz azonos időközönként mindig ugyananyival kamatozik.

2. feladat. *Egy kémcsőnyi víz* ^{131}J *jódizotóppal szennyeződött be.* 4 *nappal később a kémcső tartalmának aktivitása* 185 Bq *volt. Hány gramm* ^{131}J *került a vízbe?* (1 Bq = 1 bomlás másodpercenként, 1 g ^{131}J-nak az aktivitása $4{,}6 \cdot 10^{15}$ Bq, a felezési idő 8 nap.)

Ha $c \neq 0$, akkor $s_{k+1} = q \cdot s_k + c$-re azt a gyakorlati példát is mondhatjuk, hogy minden időegység alatt mindig adott összeget vonnak le kezelési költségként/mindig ugyanannyit teszünk be a számlára. Ezért itt már két helyen is van mértani sorozat: az egyik pont az előző, a másik pedig ugyanazon kvóciensű (hányadosú) sorozat tagjainak összege, ahol az első tag c. Így

$$s_k = s_0 \cdot q^k + \frac{q^k - 1}{q - 1}\, c,$$

amiből az exponenciális tagot kiemelve

$$s_k = \left(\frac{c}{q-1} + s_0\right) \cdot q^k - \frac{c}{q-1}. \tag{3}$$

3. feladat. *Igazoljuk a képletet! Mi történik az $\alpha = 0$ és az $\alpha = \beta$ esetekben?*

4. feladat. *Minden újszülött jogosult százezer forintnyi babakötvényre, amit a Magyar Államkincstár állít ki. Egy lelkes fiatal házaspár elhatározza, hogy minden hónapban ötezer forintot tesznek be Emma lányuk számlájára, amíg 18 éves nem lesz. Arra számítanak, hogy évi 10%-os kamat mellett szép summa gyűlik majd össze. Vajon fedezi-e Emma egyetemi tanulmányait az így felhalmozott összeg?*

A $\gamma = c = 0$ eset egy lineáris rekurzió (l. a 2.1. fejezetet), a leíró egyenletet pedig *homogénnek* nevezik. (Egy egyenlet homogén, ha megoldáshalmaza megegyezik tetszőleges $\lambda \neq 0$-szorosának megoldáshalmazával. Egy f függvény homogén, ha tetszőleges $\lambda \neq 0$-val

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda f\left(\frac{x_1}{\lambda}, \frac{x_2}{\lambda}, \ldots, \frac{x_n}{\lambda}\right).$$

Egy koordinátarendszer homogén, ha tetszőleges $\lambda \neq 0$-ra az $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ és a $(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$ koordináták ugyanazt a pontot jelölik.) A homogén egyenlet megoldását jelöljük s^h-val. Ha $c \neq 0$, akkor az egyenlet már nem homogén, azaz *inhomogén.* Nem nehéz észrevenni, hogy (ha $q \neq 1$) az $s = \dfrac{c}{1-q}$ konstans sorozat a megoldása a (2) egyenletnek, jelöljük ezt s^{ih}_{p}-vel[1]. A $q = 1$ esetről a 4. feladat szólt. Ugyanakkor tetszőleges A valós számmal az

$$s^{ih} = s^{ih}_{\mathrm{p}} + A \cdot s^h \tag{4}$$

megoldásokat tudjuk előállítani.

Fontos megjegyezni, hogy ha az $\{s_0, s_1, \ldots\}$ sorozat megoldása egy d differencia-egyenletnek, akkor $\{s_i, s_{i+1}, \ldots\}$, $i = 1, 2, \ldots$ is megoldása. Másrészről, ha az egyenletnek több sorozat is eleget tesz, akkor az előzőek értelmében bármely két megoldás-sorozat esetén vagy az egyik tartalmazza a másikat, vagy nincs közös elemük; ezt úgy is szokás mondani, hogy a megoldások nem keresztezik egymást és nem ágaznak el.

5. feladat. *Bizonyítsuk be a fenti állítást!*

Általában, ha d egy adott problémát, folyamatot ír le, akkor a feladat tartalmaz konkrét (kontroll) feltételeket, peremfeltételeket (pl. a repülő sebessége, amiből az ejtőernyősök kiugrottak, v_0 volt).

Így az iménti megoldás folytatható a peremfeltételhez való igazítással:

$$A = \frac{c}{q-1} + s_0,$$

amivel visszakapjuk a korábbi megoldásban adódott (3) sorozatot.

2. Delta 2

A *Fibonacci-számok* (általánosabban pedig a *Fibonacci-féle sorozatok*[2]) megadásában három egymást követő sorozatelem szerepel: $f_k + f_{k+1} = f_{k+2}$, illetve általában $\alpha f_k + \beta f_{k+1} = f_{k+2}$. Ebben az esetben azt is mondhatjuk, hogy a különbségek különbsége áll az egyenlet egyik oldalán. Ugyanis

$$\left(\Delta^2 f\right)_k = (\Delta f)_{k+1} - (\Delta f)_k = f_{k+2} - 2f_{k+1} + f_k$$

jelöléssel a Fibonacci sorozat megadható egy differencia-egyenlet megoldásaként: $\Delta^2 f + \Delta f - f = 0$. Az egyenlet megoldása ismert:

$$f_k = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k.$$

A klasszikus esetben $f_0 = 0$ és $f_1 = 1$ a kezdőfeltételek, melyekkel $A = -B = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

6. feladat. *Az első rész eredményeit felhasználva oldjuk meg a*

$$\Delta^2 f + (1-r)\Delta f = 0$$

másodrendű egyenletet, ha $f_1 = c + r \cdot f_0$, ahol c a feladathoz adott konstans.

---

[1] p, mint partikuláris, azaz részleges

[2] A téma nagyon érdekes feldolgozása olvasható Énekes Béla – Kós Géza: Néhány érdekesség a Fibonacci- és a Fibonacci-típusú sorozatokról I.–II. (*KöMaL*, 2000/12. és 2001/1.) cikkekben.

2.1. Delta n

A legegyszerűbb homogén differencia-egyenletek lineáris rekurziók, ezért hasznos, sőt szükséges az ismeretük – gondoljunk csak a (4)-beli elvre.

Az
$$a_0 r_k + a_1 r_{k-1} + a_2 r_{k-2} + \cdots + a_{n-1} r_{k-n+1} + a_n r_{k-n} = 0$$
rekurzió ($a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots n$) megoldásának első lépése az
$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$
karakterisztikus polinom felírása. Tegyük fel, hogy ennek az egymástól különböző gyökei $q_1, q_2, \ldots q_j$, $j \le n$. Ha $j = n$, akkor a sorozat tagjai

$$r_k = A_1 q_1^k + \ldots + A_n q_n^k \tag{5}$$

alakban állnak elő. (Ha valamelyik gyök nem valós komplex szám, akkor az együtthatója is az.)

7. feladat. *Igazoljuk az állítást.*

Abban az esetben, ha pl. q_1 többszörös gyök, azaz $(x - q_1)^\ell$ osztója a karakterisztikus polinomnak ($2 \le \ell \le n-j+1$), akkor az (5)-beli összegben ℓ darab tagot az $A_1 q_1^k + A_2 k q_1^k + \ldots + A_\ell k^{\ell-1} q_1^k$ összeg helyettesít. Így az általános megoldás (5)-nél bonyolultabb:
$$\sum_i a_i(k) q_i^k,$$
ahol a_i egy olyan polinom, amelynek a foka kisebb, mint a q_i gyöknek a multiplicitása.

Speciálisan a másodrendű esetben (azaz ha $n = 2$) a karakterisztikus polinom gyökeiként kaphatunk két különböző valós számot (mint például a Fibonacci-sorozat esetében is), és $s_k^h = A_1 q_1^k + A_2 q_2^k$. Előfordulhat, hogy a karakterisztikus polinom „teljes négyzet”, azaz egy gyöke van (ami kétszeres). Ebben az esetben
$$s_k^h = A_1 q^k + A_2 k q^k.$$

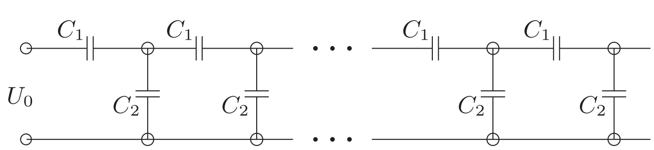
8. feladat. *Mutassuk meg, hogy a karakterisztikus polinom*
a) egyik gyöke pontosan akkor 1, ha a differencia-egyenlet visszavezethető egy elsőrendű egyenletre;
b) pontosan akkor „teljes négyzet”, ha a differencia-egyenlet is az.

Harmadik esetként, ha a karakterisztikus polinomnak két (egymással konjugált) nem valós komplex gyöke van, akkor az A_1 és A_2 együtthatók olyan komplex számok, amelyek egymás konjugáltjai.

Az elméletet azonban óvatosan kell alkalmazni a gyakorlatban!

1. példa. *Régen a magasfeszültséget szállító vezetékek mellett porcelántárcsákat használtak szigetelésnek. Ezt úgy kellett megtervezni, hogy sehol se üssön át.*

Ezt az áramkört sematikusan egy létraszerű nagyon-nagyon hosszú kondenzátorsorral lehet szemléltetni:



A k-adik csomópontban a feltétel szerint $\sum Q = 0$, így felírható a
$$C_1 U_{k+1} - (2C_1 - C_2) U_k + C_1 U_{k-1} = 0$$
rekurzió. A karakterisztikus polinom szerint van megoldás, ha $C_2 \ge 4C_1$, ám a tapasztalatok szerint $U_k = U_0 \cdot q^k$ alakú (ahol q a nagyobbik gyök).

1. gyakorlat. *A $C_2 \ge 4C_1$ esetben számítsuk ki q értékét.*

3. Delta 1 – P kód

Modellezzük az **Alapfeladat**ot a lehető legegyszerűbb esetre. A parkolóhelyek egymás után vannak sorban, az áruháztól való távolságuk növekvő sorrendjében számozva. Csak az éppen mellettünk levő parkolóról látjuk, hogy foglalt-e vagy sem – meg persze a már mögöttünk levőkről. Legyen p annak a valószínűsége, hogy egy hely szabad, $q = 1 - p$ pedig annak, hogy foglalt; minderről pl. a bejáratnál levő számláló tájékoztathat, és ez a parkolás ideje alatt nem változik.

3.1. P1

A feladatbeli feltételeket modellezhetjük azzal, hogy a kevésbé jó parkolást büntetjük. A parkolásért annyit kelljen fizetni, amilyen messze van a hely (k), de ha nem állunk meg, és az áruház elé érünk (0. hely), akkor igen magas összegre rúgó büntetést kapunk (C). Ezzel az átfogalmazással a lehető legkisebb díjat keressük. A következő kérdésre kell tehát válaszolni: mikor döntünk úgy, hogy a következő szabad helyre beállunk?

A k-adik helynél állva azt mérlegeljük: ha szabad, akkor leparkolunk, és a fizetendő díj k, vagy előre megyünk eggyel. Azt választjuk, ami jobban megéri: k és V_{k-1} közül melyik a kisebb, ha általában V_n-nel jelöljük a várhatóan fizetendő összeget az n-edik helyen. Ha foglalt a hely, akkor muszáj továbbállni. Ezért

$$V_k = p \cdot \min\{k, V_{k-1}\} + q \cdot V_{k-1}. \tag{6}$$

Ez a várható tarifa az áruház felé haladva sajnos nem csökken (különben gondolkodás nélkül előrehajtanánk). A rekurzió felírásakor természetesnek vettük, hogy a $(k-1)$-edik helyen is ugyanezt a stratégiát fogjuk követni. Ez egy nagyon fontos elv az optimalizációs és kontroll folyamatok vizsgálatánál: a legjobb stratégia meghatározásához (pl. optimális gazdasági növekedés, befektetések, monetáris és fiskális politika), amit *Bellmann-elvként/egyenletként*[3] ismernek. A lényege: az optimális stratégia minden lépése optimális.

9. feladat. *Mutassuk meg, hogy V_k nemnövő sorozat.*

Tehát amíg $k \geq V_{k-1}$, addig haladunk előre, és $V_k = V_{k-1}$. Abban a pillanatban, amikor $k \leq V_{k-1}$, azaz $V_k = pk + q \cdot V_{k-1}$ a várható díj – a legelső szabad helyre beállunk. Ahogy az első részben, itt is egy lehetséges megoldás $V_0, V_1, V_2, \ldots$ felírásával megsejteni V_k alakját és indukcióval bizonyítani. Ehelyett azonban nézzük a megoldandó differencia-egyenletet:

$$\Delta V + pV = pk + p. \tag{7}$$

Általánosabban, vizsgáljuk a

$$\Delta V = \mu V + \nu k + \omega \tag{8}$$

differencia-egyenletet. Tudjuk, hogy a speciális $\nu = 0$ és $\omega = 0$ (homogén) esetben a (3) szerint $V_k^h = V_0^h(\mu+1)^k$.

10. feladat. *Mi a megoldása a $\Delta V = 2k + 1$ egyenletnek? És a $\Delta V = \nu k + \omega$-nak?*

A (4) szerint keressünk a (8) kérdésre egy konkrét V_k^* megoldást, mert akkor a $V_k = A \cdot V_k^h + V_k^*$-ként előállított is jó (A tetszőleges szám). Márpedig

$$V_k^* = -\frac{\nu}{\mu}k - \frac{\nu}{\mu^2} - \frac{\omega}{\mu},\ (\mu \neq 0), \quad \text{illetve} \quad V_k^* = \frac{\nu}{2}k^2 + \left(\omega - \frac{\nu}{2}\right)k,\ (\mu = 0),$$

ezt visszahelyettesítve egyenlőséget kapunk! Így a megoldás, természetesen igazítva az adott sorozathoz:

$$V_k = \frac{V_0 + \frac{\nu}{\mu^2} + \frac{\omega}{\mu}}{V_0^h}(\mu+1)^k - \frac{\nu}{\mu}k - \frac{\nu}{\mu^2} - \frac{\omega}{\mu}, \quad \text{illetve} \quad V_k = \frac{\nu}{2}k^2 + \left(\omega - \frac{\nu}{2}\right)k + V_0.$$

[3] *Richard E. Bellmann* (1920–1986), a dinamikus programozás atyja

Alkalmazzuk $\mu = -p$, $\nu = p$, $\omega = p$ és $V_0 = C$-re, hogy megkapjuk a várható parkolási díj nagyságát:

$$V_k = \left(C + \frac{q}{p}\right) q^k + k - \frac{q}{p}.$$

Némi számolás után kiderül, hogy a kritikus hely $k_0 = \left[1 - \log_q(pC + q)\right] + 1$ ($[x] = n$, ahol $n \leq x < n+1$, $n \in \mathbb{N}$). Ha valóban alkalmazni szeretnénk ezt a stratégiát, akkor C megválasztásával tudjuk biztosítani, hogy elég nagy valószínűséggel valóban le tudjunk parkolni, de ne kelljen túl messze megállni csak azért, mert „biztosra" akarunk menni.

11. feladat. *Mi annak a valószínűsége, hogy a kiszámolt k_0-adik parkolóhely után mégsem lesz szabad hely?*

12. feladat. *Hogyan válasszuk meg C-t, ha legalább 90%-os eséllyel szeretnénk üres helyet találni?*

3.2. P2

Befejezésül néhány megjegyzés a feladat modelljének egy kissé módosított változatáról. Annak a valószínűsége, hogy a k-adik hely foglalt, legyen a hely függvénye $q\colon \mathbb{N} \to (0,1)$, például $q(k) = q^k$. Ekkor a megoldandó egyenlet

$$\Delta V + \frac{1-q^k}{q^k} \cdot V = \frac{1-q^k}{q^k} \cdot k, \tag{9}$$

ennek megoldásához a korábban megbeszéltekből két dolog használható. Elmondható ugyanis, hogy ha van megoldás, akkor adott V_0 kezdőfeltétel esetén ez egyértelmű. Másrészről ha V_k^h megoldása a

$$\Delta V + \frac{1-q^k}{q^k} \cdot V = 0 \tag{10}$$

homogén egyenletnek, V_k^* pedig egy konkrét (általános) megoldás, akkor $V_k = A \cdot V_k^h + V_k^*$ is megoldása (9)-nek. Látjuk, hogy (10) már nem lineáris, nem használhatjuk azt, ami idáig jól működött. Célunk ugyanakkor a módosított probléma megoldása, azaz a $V_k \leq k$ egyenlőtlenség küszöbindexének megtalálása: a legelső jó k, amit nevezzünk k_0-nak. Adott C és q mellett ez persze megállapítható, általános megoldáshoz pedig használhatunk egy V_k-t közelítő megoldást:

$$\tilde{V_k} = (C+1) q^{\frac{k^2}{2}} + k - 1,$$

aminek segítségével

$$k_0 = \left\lceil \sqrt{\log_q C}\, \right\rceil.$$

($\lceil x \rceil = [x] + 1$, az x felső egészrésze.)

13. feladat. *Mutassuk meg, hogy a $\tilde{V_k}$ közelítő megoldás minimumhelye k_0 és $|\tilde{V}_{k_0} - k_0| < 1$.*

Ez lesz a munkamódszere a differenciál-egyenletek megoldásának is (pl. mi történik a villany felkapcsolásakor, miért kering ellipszis pályán a Föld). A történet pedig ott folytatódik.

Felhasznált irodalom

[1] `http://www.math.bme.hu/~jofri/JOFRI/OKTAT/pmmar.pdf`

[2] `http://wikipedia.org/wiki/Richard_E._Bellmann`

[3] `http://wikipedia.org/wiki/Bellmann_equation`