

## I. rész

1. Határozzuk meg a következő kifejezések pontos értékét:

$$a = \lg 1000^{2007} + \lg 0,001^{2007};$$

(2 pont)

$$b = (2005! + 2006!) \left( \frac{1}{2006!} - \frac{1}{2007!} \right);$$

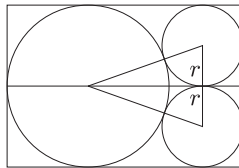
(4 pont)

$$c = \left( \frac{2}{\sqrt{2007} - 1} \right) \left( \frac{1}{1 + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2005} + \sqrt{2007}} \right).$$

(5 pont)

2. Egy négyzet alapú egyenes hasáb (négyzetes oszlop) egy oldallapjának átlója 10 cm, a testátlója 12,5 cm. Mekkora a hasáb felszíne és térfogata? (12 pont)

3. Egy téglalap alakú parkban az *ábra* szerint három egymást és a téglalap oldalait érintő kör alakú virágágyást, valamint a park területén, a körök mentén, és a körök középpontjaira illeszkedő, az ábrára berajzolt összes vonal mentén utakat létesítettek. A két kisebb, egyenlő méretű ágyás sugara  $r = 15$  m.



a) Mekkora a nagy kör sugara? (2 pont)

b) Milyen hosszú a teljes úthálózat? (8 pont)

c) Hány százalékát tölti ki a három kör az egész téglalap területének? (4 pont)

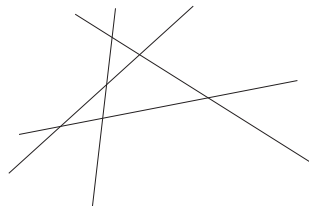
4. Adott a síkban 10 általános helyzetű egyenes. (Nincs köztük két párhuzamos, és bármely metszésponton csak két egyenes halad át.)

a) Hány metszéspontja van a 10 egyenesnek? (2 pont)

b) Hány egymást nem fedő szakaszt, és hány félegyeneset számolhatunk össze a 10 egyenesen? (5 pont)

c) Véletlenszerűen kiválasztunk a keletkező egyenesdarabok (szakaszok és félegyenesek) közül kettőt. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott két egyenesdarab azonos típusú lesz? (Mindegyik szakasz, vagy mindegyik félegyenes.) (8 pont)

(Pl. ezen az *ábrán* 4 általános helyzetű egyenesnél 6 metszéspontot, 8 szakaszt és 8 félegyeneset, azaz 16 egyenesdarabot számolhatunk össze.)



## II. rész

5. Adott a koordináta-rendszerben az  $A(2; 2)$  és  $B(9; 9)$  pont. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely illeszkedik az  $A$  és  $B$  pontokra és érinti az  $x$  tengelyt. (16 pont)

6. Írjuk fel a páratlan természetes számokat a következő háromszög alakú táblázatba úgy, hogy minden sorban eggyel több szám szerepeljen, mint az előzőben:

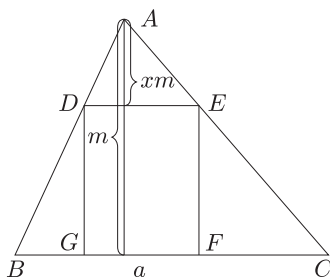
$$\begin{array}{cccc}
 & & & 1 \\
 & & 3 & 5 \\
 & 7 & 9 & 11 \\
 13 & 15 & 17 & 19 \\
 21 & 23 & \dots & 
 \end{array}$$

- a) Melyik szám áll a 20. sor elején? (3 pont)
- b) Adjuk meg  $n$  függvényében, hogy melyik szám áll az  $n$ -edik sor elején, a végén, és mennyi a sorban szereplő számok összege. (6 pont)
- c) Mennyi lesz a számok összege abban a sorban, amelyben a 2007-es szám szerepel? (3 pont)
- d) Az első 100 sorból kiválasztunk véletlenszerűen egyet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a választott sorban a számok összege négyzetszám? (4 pont)
7. a) Milyen valós  $x$ -ek elégítik ki a  $4^{x+1} - 13 \cdot 6^x + 9^{x+1} = 0$  egyenletet? (7 pont)
- b) Milyen  $[0^\circ; 180^\circ]$  intervallumba eső  $x$  szögek elégítik ki a következő egyenletet?

$$2 \sin^2 x + 13 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 6.$$

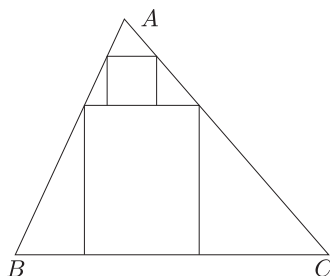
(9 pont)

8. A  $T$  területű  $ABC$  hegyesszögű háromszögbe írjunk téglalapot az 1. ábra szerint.



1. ábra

- a) Az  $ADE$  háromszög  $A$ -ból induló magassága  $x$ -szerese az  $ABC$   $A$ -ból induló  $m$  magasságának ( $0 < x < 1$ ). Fejezzük ki az  $ADE$  háromszög és a  $DEFG$  téglalap területét  $T$  és  $x$  segítségével. (4 pont)
- b) Legfeljebb hányad részét tölti ki a téglalap az  $ABC$  háromszög területének? (5 pont)
- c) Legfeljebb hányad részét tölti ki a 2. ábra szerint berajzolt két téglalap az  $ABC$  háromszög területének? (7 pont)



2. ábra

9. Melyek azok az  $n$  természetes számok, amelyekre teljesül a következő két feltétel?

– Az  $\frac{1}{n}$  tizedes tört alakja véges.

– Az  $n^2$ -nek háromszor annyi pozitív osztója van, mint az  $n$ -nek.

(16 pont)