[1]

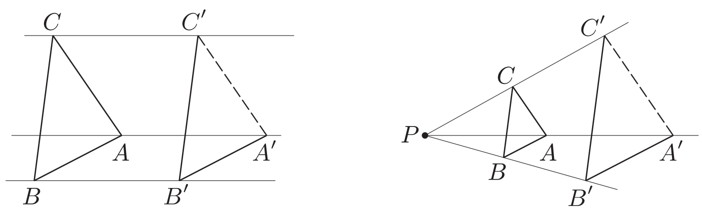
Száz éve, 1907. február 13-án született *Kárteszi Ferenc* professzor. Középiskolás korában feladatmegoldóként került először kapcsolatba lapunkkal. Elsőéves egyetemista volt, amikor első cikke [1] megjelent. A tehetséges diák hamarosan a lap szerkesztésébe is bekapcsolódott, s ettől kezdve 1969-ig volt a matematikai szerkesztő bizottság tagja. Ezután sem szakadt meg kapcsolata lapunkkal, rengeteg érdekes feladatot tűzött ki és számos cikket írt a későbbiekben is. Utolsó cikke [3], ami 1978-ban jelent meg, egyik kedvenc témájával, Desargues tételével foglalkozik. Ehhez kapcsolódik két cikkünk, melyet Kárteszi professzor egykori diákjai írtak szeretett tanáruk születésének centenáriumára emlékezve.

$*$

Elemi geometriából jól ismert a következő két tétel, melyeket most a szokásostól eltérő módon bizonyítunk.

***D_0*-tétel.** *Ha az ABC és az $A'B'C'$ háromszögek úgy helyezkednek el a síkon, hogy az AA', BB' és CC' egyenesek párhuzamosak, továbbá az AB egyenes párhuzamos az $A'B'$ egyenessel, a BC egyenes pedig párhuzamos a $B'C'$ egyenessel, akkor a CA egyenes is párhuzamos a $C'A'$ egyenessel.*

Bizonyítás. Legyen φ az az eltolás, ami a B pontot B'-be viszi. Mivel eltolásnál tetszőleges ℓ egyenes ℓ^φ képe párhuzamos ℓ-lel, egy egyenes pedig pontosan akkor egyezik meg a képével, ha párhuzamos az eltolás irányával, ezért az AA' és CC' egyenesek φ fixegyenesei, továbbá $(AB)^\varphi = A'B'$ és $(BC)^\varphi = B'C'$, amiből következik, hogy $A^\varphi = A'$ és $C^\varphi = C'$. Ez viszont azt jelenti, hogy $(CA)^\varphi = C'A'$, tehát a CA és $C'A'$ egyenesek párhuzamosak. $\square$



***D_1*-tétel.** *Ha az ABC és az $A'B'C'$ háromszögek úgy helyezkednek el a síkon, hogy az AA', BB' és CC' egyenesek egy közös P ponton mennek át, továbbá az AB egyenes párhuzamos az $A'B'$ egyenessel, a BC egyenes pedig párhuzamos a $B'C'$ egyenessel, akkor a CA egyenes is párhuzamos a $C'A'$ egyenessel.*

Bizonyítás. Legyen φ az a P középpontú középpontos hasonlóság, ami a B pontot B'-be viszi. Mivel középpontos hasonlóságnál tetszőleges ℓ egyenes ℓ^φ képe párhuzamos ℓ-lel, valamint tetszőleges T pont esetén a TT^φ egyenes átmegy P-n, ezért az AA' és CC' egyenesek φ fixegyenesei, továbbá $(AB)^\varphi = A'B'$ és $(BC)^\varphi = B'C'$, amiből következik, hogy $A^\varphi = A'$ és $C^\varphi = C'$. Ez viszont azt jelenti, hogy $(CA)^\varphi = C'A'$, tehát a CA és $C'A'$ egyenesek párhuzamosak. $\square$

Ha a D_0- és D_1-tételekben szereplő AB és $A'B'$, valamint BC és $B'C'$ egyenespárok nem párhuzamosak, akkor is mondhatunk valamit a CA és $C'A'$ egyenesek kölcsönös helyzetéről. Ehhez azonban némi előkészületre van szükségünk.

Legyen $\mathcal{S}$ és $\mathcal{S}'$ két nem párhuzamos sík a térben, v pedig egy olyan egyenes, amely a két sík egyikével sem párhuzamos. Az $\mathcal{S}$ tetszőleges T pontjához rendeljük hozzá a T-n átmenő, v-vel párhuzamos egyenesnek az $\mathcal{S}'$ síkkal való T' döféspontját. Ezt a hozzárendelést *v irányú vetítésnek* nevezzük. Megmutatjuk, hogy a v irányú vetítés olyan kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés $\mathcal{S}$ és $\mathcal{S}'$ pontjai közt, amely egyeneseket egyenesekbe visz és megtartja a párhuzamosságot is.

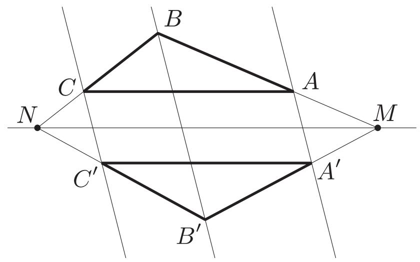
A kölcsönös egyértelműség abból következik, hogy v nem párhuzamos $\mathcal{S}$ és $\mathcal{S}'$ egyikével sem, így tetszőleges, a v-vel párhuzamos egyenes pontosan egy pontban döfi $\mathcal{S}$-et is és $\mathcal{S}'$-t is. Ha e az $\mathcal{S}$ sík tetszőleges egyenese, akkor az e pontjain átmenő, v irányú egyenesek egy v-vel párhuzamos $\mathcal{V}_e$ síkot alkotnak. Ez a sík nem párhuzamos $\mathcal{S}'$-vel, mert minden v-vel párhuzamos egyenes metszi $\mathcal{S}'$-t. Ezért $\mathcal{S}' \cap \mathcal{V}_e$ egy e' egyenes. Ha f és g az $\mathcal{S}$ sík párhuzamos egyenesei, akkor a v irányú vetítésnél nekik megfeleltetett f' és g' egyenesek is párhuzamosak $\mathcal{S}'$-ben, mert ha K' közös pontjuk lenne, akkor a K'-n átmenő v-vel párhuzamos egyenes és $\mathcal{S}$ döféspontja f-nek is és g-nek is pontja lenne, ami ellentmondás.

A vetítés tulajdonságait használva könnyen beláthatjuk a következő tételt.

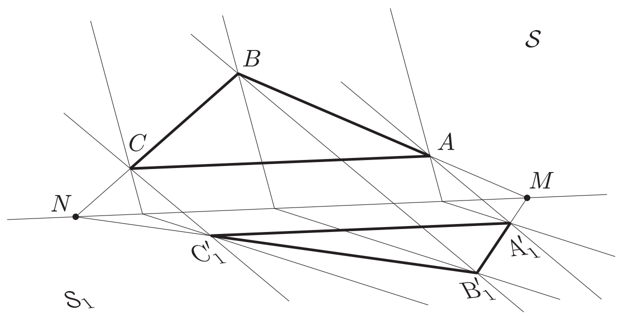
***D_2*-tétel.** *Tegyük fel, hogy az ABC és az $A'B'C'$ háromszögek úgy helyezkednek el az $\mathcal{S}$ síkon, hogy az AA', BB' és CC' egyenesek párhuzamosak, továbbá az AB és az $A'B'$ egyenesek metszik egymást az M pontban, a BC és a $B'C'$ egyenesek pedig metszik egymást az N pontban. Ekkor, ha az MN egyenes párhuzamos a CA egyenessel, akkor a CA egyenes párhuzamos a $C'A'$ egyenessel is, ha pedig az MN és CA egyenesek az R pontban metszik egymást, akkor a $C'A'$ egyenes is átmegy R-en.*

Bizonyítás. Forgassuk el az $\mathcal{S}$ síkot MN körül például 90°-kal. Jelölje $\mathcal{S}_1$ az elforgatott síkot, tetszőleges $T \in \mathcal{S}$ pont elforgatottját pedig jelölje T_1. Legyen φ a BB_1' irányú vetítés $\mathcal{S}$ és $\mathcal{S}_1$ pontjai közt. Megmutatjuk, hogy $A^\varphi = A_1'$ és $C^\varphi = C_1'$.

[1] A cikk elkészítését a Nemzeti Kutatási és Technológiai Hivatal (NKTH) támogatta az Öveges József program keretében. A támogatás forrása a Kutatási és Technológiai Innovációs Alap.



Az AA', BB' és CC' egyenesek párhuzamosak, ezért a párhuzamos szelők tétele szerint $MA : MB = MA' : MB'$ és $NC : NB = NC' : NB'$. Mivel az MNegyenes körül forgattunk, az M, A_1', B_1' és az N, C_1', B_1' ponthármasok kollineárisak a $\mathcal{S}_1$ síkon, továbbá $MA' = MA_1'$ és $MB' = MB_1'$, valamint $NC' = NC_1'$ és $NB' = NB_1'$. Tehát $MA : MB = MA_1' : MB_1'$ és $NC : NB = NC_1' : NB_1'$. Vagyis az az M középpontú középpontos hasonlóság, amely A-t B-be viszi, az A_1'-et szükségképpen B_1'-be viszi; az az N középpontú középpontos hasonlóság pedig, amely C-t B-be viszi, a C_1'-et B_1'-be képezi. Középpontos hasonlóságnál egyenes és képe párhuzamosak, ezért AA_1' is és CC_1' is párhuzamos BB_1'-gyel, azaz $A^\varphi = A_1'$ és $C^\varphi = C_1'$. Ez viszont azt jelenti, hogy $(CA)^\varphi = C_1'A_1'$.



Ha az MN egyenes párhuzamos a CA egyenessel, akkor a $(CA)^\varphi$ egyenes is párhuzamos MN-nel a vetítés tulajdonságai miatt, ezért azt MN körül visszaforgatva $\mathcal{S}$-be, a kapott $C'A'$ egyenes is párhuzamos lesz MN-nel. Ha pedig az MN és $(CA)^\varphi$ egyenesek az R pontban metszik egymást, akkor a $C'A'$ egyenes is átmegy R-en. $\square$

E három tétel bizonyítása nagyon hasonló. Mindig választunk egy alkalmas *kollineációt,* azaz a sík pontjainak egy olyan permutációját, amelyre igaz, hogy bármely három pont pontosan akkor van egy egyenesen, ha a képeik is egy egyenesen vannak (tehát a kollineáció egyenest egyenesbe visz és megőrzi a pontok és egyenesek illeszkedését), majd ennek a tulajdonságait használva belátjuk az állítást. A különbségek abból adódtak, hogy bizonyos egyenesek az egyes esetekben párhuzamosak voltak. Valójában azonban csak a pontok és egyenesek illeszkedési tulajdonságait használtuk. Mindhárom eddig bizonyított tételünk speciális esete *Desargues tételének.* Ezt a tételt egyszerűbben megfogalmazhatjuk a *klasszikus projektív síkon.* Ezen a síkon nincsenek párhuzamos egyenesek. Ezt úgy érjük el, hogy az euklideszi sík minden egyenesét – ezeket a továbbiakban *közönséges egyeneseknek* nevezzük – kibővítjük egy-egy *ideális ponttal,* mégpedig úgy, hogy két egyenest pontosan akkor bővítünk ugyanazzal a ponttal, ha az euklideszi síkon párhuzamosak. Vagyis az ideális pontokat tekinthetjük az euklideszi sík párhuzamos egyenesei által alkotott osztályoknak. Valamely közönséges egyenes akkor tartalmaz egy ideális pontot, ha benne van az annak megfelelő egyenesosztályban. Bevezetünk egy *ideális egyenest* is. Ezt úgy definiáljuk, hogy tartalmazza az összes ideális pontot, de ne tartalmazzon az euklideszi sík pontjai – ezeket a továbbiakban *közönséges pontoknak* nevezzük – közül egyetlen egy pontot sem.

A következő két tétel azt mutatja, hogy a klasszikus projektív síkon a pontok és egyenesek illeszkedési tulajdonságai szimmetrikusak.

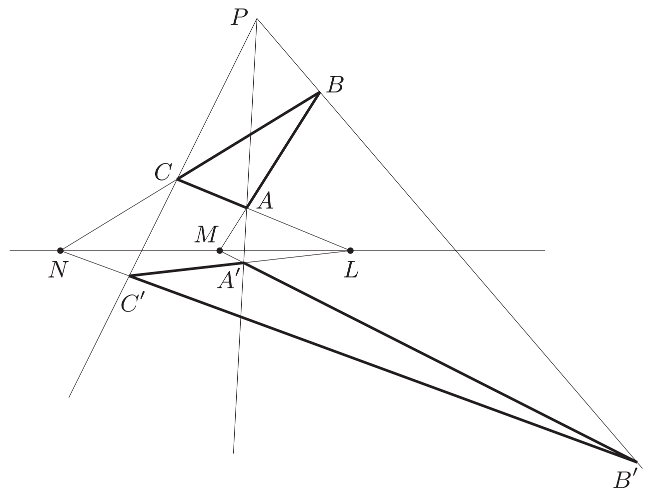
P1-tétel. *A klasszikus projektív sík bármely két különböző pontjának egyértelműen létezik összekötő egyenese.*

Bizonyítás. Két különböző közönséges ponthoz egyértelműen van olyan közönséges egyenes, ami összeköti őket, az ideális egyenes pedig nem illeszkedik közönséges pontokra. Egy közönséges és egy ideális ponthoz az euklideszi párhuzamossági axióma miatt egyértelműen létezik az ideális pont osztályába tartozó, a közönséges ponton átmenő egyenes, azaz a két pontot összekötő közönséges egyenes, az ideális egyenes pedig ebben az esetben sem megy át mindkét ponton. Két különböző ideális pontra viszont csak az ideális egyenes illeszkedik, mert egy közönséges egyenes az ideális pontoknak megfelelő osztályok közül pontosan egyhez tartozik. $\square$

P2-tétel. *A klasszikus projektív sík bármely két különböző egyenesének egyértelműen létezik metszéspontja.*

Bizonyítás. Két különböző közönséges egyenes az euklideszi síkon vagy párhuzamos, vagy metszi egymást. Az első esetben nincs közös közönséges pontjuk, viszont egy osztályba tartoznak, tehát egyértelműen létezik közös ideális pontjuk. A második esetben egyértelműen létezik közös közönséges pontjuk, viszont különböző osztályokba tartoznak, ezért nincs közös ideális pontjuk. Végül egy közönséges egyenesnek és az ideális egyenesnek nincs közös közönséges pontja, viszont pontosan egy közös ideális pontjuk van, a közönséges egyenes osztályának megfelelő ideális pont. $\square$

Desargues tétele. *Tegyük fel, hogy az ABC és az $A'B'C'$ háromszögek úgy helyezkednek el a klasszikus projektív síkon, hogy az AA', BB' és CC' egyeneseknek van egy közös P pontjuk. Ekkor az AB és $A'B'$ egyenesek M metszéspontja, a BC és $B'C'$ egyenesek N metszéspontja, valamint a CA és $C'A'$ egyenesek L metszéspontja egy egyenesre illeszkedik.*



A P pont és az MN egyenes különböző választásaival Desargues tétele az előzőekben bizonyított állításokat adja. Ha P ideális pont, MN pedig az ideális egyenes, akkor a D_0-tételt, ha P közönséges pont és MN az ideális egyenes, akkor a D_1-tételt, ha pedig P ideális pont és MN közönséges egyenes, akkor a D_2-tételt kapjuk.

Desargues tételének sok különböző bizonyítása ismert. Lapunkban három évvel ezelőtt jelent meg egy olyan bizonyítás [6], amely a háromdimenziós tér illeszkedési tulajdonságain alapul. Ehhez hasonló bizonyítás olvasható az [5] könyv 52–53. oldalán. A Kárteszi professzor [2] könyvében található bizonyítás koordinátákat használ. E bizonyítások mindegyike a klasszikus geometria valamelyik „erős" tételén alapul. Most az eddigi bizonyításainkhoz hasonló szellemű bizonyítást adunk Desargues tételére, felhasználva a klasszikus projektív geometria következő tételét.

Tétel. *Legyen P a klasszikus projektív sík tetszőleges pontja, ℓ pedig tetszőleges egyenese. Ha a B és B' pontok különböznek P-től, nincsenek rajta ℓ-en és a BB' egyenes átmegy P-n, akkor a klasszikus projektív síkon van olyan kollineáció, amelynél B képe B', ℓ minden pontja helyben marad, továbbá minden P-n átmenő egyenes képe is önmaga.*
□

Desargues tételének bizonyítása. Az előző tétel szerint van olyan φ kollineációja a klasszikus projektív síknak, amely B-t B'-be viszi, helyben hagyja az MN egyenes minden pontját és a P-n átmenő összes egyenest is. Megmutatjuk, hogy ez a kollineáció A-t A'-be, C-t pedig C'-be viszi. A PA és PC egyenesek fixegyenesek, mert átmennek P-n. Ezért $A^\varphi \in PA$ és $C^\varphi \in PC$. Mivel $M, N \in \ell$, azért $M^\varphi = M$ és $N^\varphi = N$, tehát

$$A^\varphi = (MB \cap PA)^\varphi = (MB)^\varphi \cap (PA)^\varphi = MB' \cap PA = A',$$

és ugyanígy kapjuk, hogy

$$C^\varphi = (MB \cap PC)^\varphi = (MB)^\varphi \cap (PC)^\varphi = MB' \cap PC = C'.$$

Ekkor viszont $(CA)^\varphi = C'A'$, és ha L_1 jelöli CA és MN metszéspontját, akkor $L_1 = L_1^\varphi \in (CA)^\varphi = C'A'$, azaz

$$L_1 = CA \cap C'A' = L,$$

vagyis M, N és L kollineárisak. □

A klasszikus projektív sík P1 és P2 tulajdonságait felhasználva az *absztrakt projektív síkot* is definiálhatjuk illeszkedési axiómákkal. A sík most is egy ponthalmaz, az egyenesek pedig ennek kitüntetett részhalmazai. Ez a struktúra projektív sík, ha kielégíti a következő három axiómát:

P1 Két különböző pontra egy és csak egy egyenes illeszkedik.

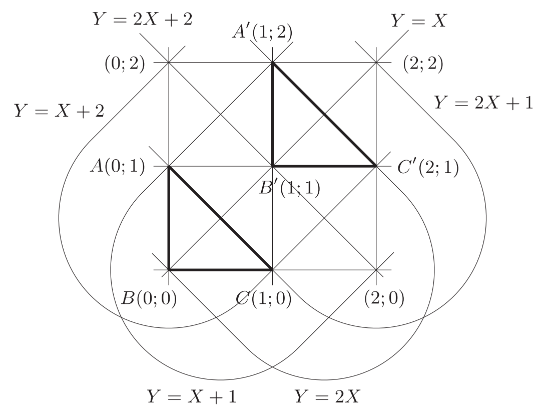
P2 Két különböző egyeneshez egy és csak egy olyan pont van, amely mindkettőre illeszkedik.

P3 Van négy olyan pont, melyek közül semelyik három nem illeszkedik egy egyenesre.

Ezekből az illeszkedési axiómákból azonban nem következik, hogy az absztrakt projektív sík beágyazható valamilyen háromdimenziós térbe, az sem, hogy koordinátákat vezethetünk be, valamint az sem, hogy léteznek az előző tételben szereplő kollineációk. Ezért Desargues tételének a klasszikus projektív síkon működő bizonyításai sem érvényesek.

Könnyen meggondolható, hogy ha a Π absztrakt projektív sík valamely ℓ_∞ egyenesét és az összes ℓ_∞-re illeszkedő pontját elhagyjuk, akkor az így kapott $\Sigma = \Pi \setminus \ell_\infty$ ponthalmaz ún. *absztrakt affin síkot* alkot, azaz kielégíti az euklideszi párhuzamossági axiómát. Σ két egyenese pontosan akkor lesz párhuzamos, ha Π-ben a megfelelő egyenesek metszéspontja ℓ_∞-re illeszkedett. Ha pedig egy Σ absztrakt affin síkból indulunk ki, akkor ugyanúgy, ahogy az euklideszi síkból elkészítettük a klasszikus projektív síkot, egy egyenes és az arra illeszkedő pontok hozzávételével megkapjuk Σ projektív lezártját, ami absztrakt projektív sík. Ezért minden olyan tételnek, ami csak az illeszkedés tulajdonságait használja, van projektív és affin változata is.

Az absztrakt affin síkok közt vannak olyan, a klasszikus euklideszi síktól különböző síkok, melyeken igaz Desargues tétele. Ilyenre példa a [4] cikkben leírt $\mathrm{AG}\,(2,p)$ sík. (Az *ábrán* $p=3$ esetén látható a D_0-tételnek eleget tevő két háromszög.) Azonban csupán az illeszkedési axiómákból nem bizonyítható be a tétel. Cikkünknek a következő számban megjelenő folytatásában egy olyan absztrakt affin síkot konstruálunk, amelyen nem igaz Desargues tétele, sőt annak gyengébb változata, a D_0-tétel sem. A folytatás előtt ajánljuk a következő feladatok megoldását.



Feladatok

1. Az euklideszi sík $A_1A_2A_3$ háromszöge A_i csúcsához tartozó magasságvonalának talppontja legyen B_i $(i=1,2,3)$. Mutassuk meg, hogy ha a háromszög nem egyenlő szárú, akkor az $A_iA_j \cap B_iB_j$ pontok kollineárisak. Mit mondhatunk akkor, ha a háromszög egyenlő szárú, illetve szabályos?

2. Legyen Σ olyan absztrakt affin sík, amin igaz a Desargues-tétel. Legyenek x, u és v párhuzamos egyenesek, X_1 és X_2 az x-re illeszkedő pontok, U és V pedig olyan pontjai Σ-nak, amelyek a három egyenes egyikére sem illeszkednek. Legyen

$$UX_i \cap u = U_i, \quad VX_i \cap v = V_i, \quad \text{és} \quad UV_i \cap VU_i = M_i, \quad i=1,2.$$

Mutassuk meg, hogy az M_1M_2 egyenes párhuzamos az u, v és x egyenesekkel.

3. Legyen Π olyan absztrakt projektív sík, amin igaz a Desargues-tétel. Mutassuk meg, hogy ha $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ és $C_1C_2C_3$ olyan háromszögek a síkon, melyekre az A_i, B_i, C_i $(i=1,2,3)$ ponthármasok rendre illeszkednek valamely e_i egyenesre és az e_1, e_2, valamint e_3 egyenesek egy közös ponton mennek át, akkor az egyes háromszögpárok megfelelő oldalegyeneseinek metszéspontjait tartalmazó t_{AB}, t_{BC} és t_{CA} egyeneseknek is van közös pontja.

4. Legyen Σ olyan absztrakt affin sík, amin igaz a D_0-tétel és a D_1-tétel. Legyenek x, y és e a sík olyan egymástól különböző egyenesei, melyek mind átmennek a sík egy rögzített O pontján. Az e egyenes pontjain definiálunk egy $\oplus$ műveletet: Ha $A, B \in e$, akkor legyen az A-n átmenő, x-szel párhuzamos egyenes és y metszéspontja S, az S-en átmenő, e-vel párhuzamos egyenes és a B-n átmenő, y-nal párhuzamos egyenes metszéspontja T, végül pedig a T-n átmenő, x-szel párhuzamos egyenes és e metszéspontja $A \oplus B$. Mutassuk meg, hogy az e egyenes tetszőleges A, B, C pontjai esetén igazak a következők:

a) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$,

b) $A \oplus O = O \oplus A = O$,

c) Pontosan egy olyan $(-A)$-val jelölt pont van e-n, amelyre

$$A \oplus (-A) = (-A) \oplus A = O,$$

d) $A \oplus B = B \oplus A$.

(E négy tulajdonságot összefoglalva azt mondjuk, hogy e pontjait az $\oplus$ művelet kommutatív csoporttá szervezi.) Minek felel meg az $\oplus$ művelet, ha Σ az euklideszi sík, x és y egy derékszögű koordinátarendszer két tengelye, e az $Y = X$ egyenletű egyenes, O pedig a koordinátarendszer kezdőpontja?

5. Legyen Σ olyan absztrakt affin sík, amin igaz a D_0-tétel és a D_1-tétel. Legyenek x, y és e a sík olyan egymástól különböző egyenesei, melyek mind átmennek a sík egy rögzített O pontján, $E \in e$ pedig legyen egy O-tól különböző pont. Az e egyenes O-tól különböző pontjain definiálunk egy $\odot$ műveletet: Ha $A, B \in e \setminus \{O\}$, akkor legyen az A-n átmenő, x-szel párhuzamos egyenes és az E-n átmenő, y-nal párhuzamos egyenes metszéspontja S, az OS egyenes és a B-n átmenő, y-nal párhuzamos egyenes metszéspontja T, végül pedig a T-n átmenő, x-szel párhuzamos egyenes és e metszéspontja $A \odot B$. Mutassuk meg, hogy az $e \setminus \{O\}$ halmaz tetszőleges A, B, C pontjai esetén igazak a következők:

a) $(A \odot B) \odot C = A \odot (B \odot C)$,

b) $A \odot E = E \odot A = A$,

c) Pontosan egy olyan A^{-1}-gyel jelölt pont van e-n, amelyre

$$A \odot A^{-1} = A^{-1} \odot A = E.$$

(Az $\odot$ művelet kommutativitása nem véletlenül maradt ki a feladatból. Ez a tulajdonság ugyanis nem következik Desargues tételéből, hanem csak egy annál erősebb konfigurációs tételből, *Papposz tételéből*.) Minek felel meg az $\odot$ művelet, ha Σ az euklideszi sík, x és y egy derékszögű koordinátarendszer két tengelye, e az $Y = X$ egyenletű egyenes, E pedig az $(1; 1)$ koordinátájú pont?

Irodalom

[1] Kárteszi Ferenc: *A tetraéderről,* KöMaL 1925/12. szám, 101–103.

[2] Kárteszi Ferenc: *Bevezetés a véges geometriákba,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972.

[3] Kárteszi Ferenc: *Egy érdekes és egyszerű transzformációval származtatott affin sík,* KöMaL **57** (1978. november), 97–103.

[4] Kiss György: *Hogyan szervezzünk körmérkőzéses focibajnokságot?* KöMaL **56** (2006. december), 514–525.

[5] Kiss György és Szőnyi Tamás: *Véges geometriák,* Polygon Kiadó, Szeged, 2001.

[6] Schmidt Tamás: *Geometriai terek az algebra szemszögéből,* KöMaL **54** (2004. április), 199–206.