I. rész

1. 20 *tömegszázalékos konyhasóoldat (az oldószer víz) melegítése közben az oldószer* 15 *százaléka elpárolgott. Ha most az oldathoz* 0,1 kg *konyhasót adunk, akkor az oldat ugyanannyi tömegszázalékos lesz, mintha az eredeti oldathoz* 0,1 kg *oldószert és* 0,3 kg *konyhasót adtunk volna hozzá. Mekkora az eredeti oldat tömege?* (*11 pont*)

Megoldás. Legyen az eredeti oldat tömege x kg. Az eredeti oldatban $0{,}2x$ kg az oldott anyag, és $0{,}8x$ kg az oldószer tömege. Miután az oldószer 15%-a elpárolgott, tömege $0{,}68x$ kg-ra csökkent.

A 0,1 kg konyhasó hozzáadása után:

az oldott anyag tömege:	$0{,}2x + 0{,}1$,
az oldat tömege:	$0{,}2x + 0{,}1 + 0{,}68x$.

Az oldat $\dfrac{0{,}2x+0{,}1}{0{,}88x+0{,}1} \cdot 100$ tömegszázalékos lesz.

Ugyanennyi tömegszázalékos lesz az oldat, ha az eredeti oldathoz 0,1 kg vizet, és 0,3 kg sót adunk: $\dfrac{0{,}2x+0{,}3}{x+0{,}4} \cdot 100$.

Vagyis a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$\frac{0{,}2x+0{,}1}{0{,}88x+0{,}1} \cdot 100 = \frac{0{,}2x+0{,}3}{x+0{,}4} \cdot 100.$$

Rendezés után másodfokú egyenletet kapunk: $12x^2 - 52x + 5 = 0$. Ennek megoldásai: $x_1 \approx 4{,}235$, $x_2 \approx 0{,}0984$.

Vagyis az eredeti oldat vagy kb. 4,235 kg, vagy kb. 0,0984 kg.

A szöveg alapján ellenőrzés után kiderül, hogy ezek valóban megoldások.

2. *Egy elektronikai gyárban gyártott gombelemek* 3%-*a hibás a tapasztalatok szerint. Mekkora a valószínűsége, hogy véletlenszerűen kiválasztott* 8 db *gombelem között*

a) *nincs hibás?*

b) *legalább két hibás van?* (*12 pont*)

Megoldás. *a*) $0{,}97^8 \approx 0{,}7837$ valószínűséggel nincs köztük hibás.

b) Nulla hibás van közöttük: $\binom{8}{0} \cdot 0{,}97^8 \cdot 0{,}03^0$ valószínűséggel.

Pontosan egy hibás van közöttük: $\binom{8}{1} \cdot 0{,}97^7 \cdot 0{,}03^1$ valószínűséggel.

Vagyis annak a valószínűsége, hogy legalább két hibás van a véletlenszerűen kiválasztott 8 db gombelem között:

$$1 - \binom{8}{0} \cdot 0{,}97^8 \cdot 0{,}03^0 - \binom{8}{1} \cdot 0{,}97^7 \cdot 0{,}03^1 \approx 0{,}02234.$$

3. *Oldjuk meg a következő egyenletet:*

$$\cos^2 x \cdot (2\cos^2 x + 1) = \frac{105}{128\cos^4 x + 64\cos^2 x - 64}.$$ (*14 pont*)

Megoldás. Az egyenlet nem értelmezhető azokra az x-ekre, melyekre

$$128\cos^4 x + 64\cos^2 x - 64 = 0.$$

Ezt az egyenletet megoldva kapjuk: $x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$, ahol k egész szám.

Az egyenlet jobb oldalának nevezőjét átalakítjuk:

$$\cos^2 x(2\cos^2 x + 1) = \frac{105}{64\cos^2 x(2\cos^2 x + 1) - 64}.$$

A $\cos^2 x(2\cos^2 x + 1)$ kifejezés helyett új ismeretlent bevezetve az $y = \dfrac{105}{64y - 64}$ egyenletet kapjuk. Ebből: $y_1 = \dfrac{15}{8}$, $y_2 = -\dfrac{7}{8}$.

A $\cos^2 x(2\cos^2 x + 1) = -\dfrac{7}{8}$ egyenlet nyilván nem vezet megoldásra (a bal oldal értéke biztosan nem negatív).

A $\cos^2 x(2\cos^2 x + 1) = \dfrac{15}{8}$ egyenletből a $\cos^2 x = -\dfrac{5}{4}$ nem ad x-re megoldást, a $\cos^2 x = \dfrac{3}{4}$ pedig a következő megoldásokra vezet: $x_1 = \dfrac{\pi}{6} + m \cdot \pi$, ahol m egész szám, $x_2 = \dfrac{5\pi}{6} + n \cdot \pi$, ahol n egész szám.

4. *Sanyi lottózott (90 szám közül 5-öt kell bejelölni, és 5 számot húznak ki). Kiválasztott nyolc számot (a lehetséges 90-ből), és csak ezeket felhasználva megjátszotta az összes lehetséges számötöst.*

a) Hány X-et rajzolt összesen a szelvényekre?

b) A kiválasztott 8 számból 2-őt kihúztak. Hány kettes találata volt?

c) Hány hármas találata lett volna, ha a kiválasztott 8 számból 4-et kihúztak volna? (*14 pont*)

Megoldás. *a)* A kérdés az, hogy hányféleképpen tudunk kiválasztani 8 számból 5-öt úgy, hogy a kiválasztás sorrendje nem számít. Ez $\binom{8}{5} = 56$ szelvénnyel számolva $56 \cdot 5 = 280$ szám bejelölését jelenti.

b) A kéttalálatos szelvényeken biztosan szerepel a két kihúzott szám, ezen kívül még három szám szerepel a maradék hat ki nem húzott számból. Tehát 6-ból kell 3-at kiválasztani a sorrendre való tekintet nélkül. Ez $\binom{6}{3} = 20$ eset.

Vagyis Sanyinak 20 db kéttalálatosa volt.

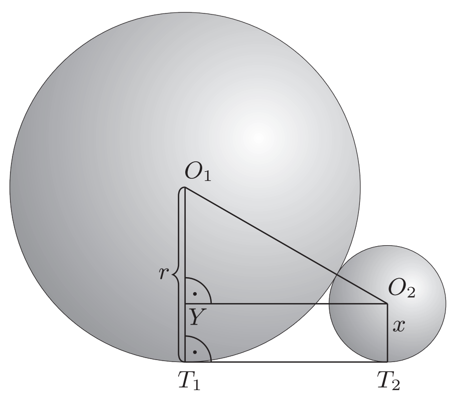
c) A kihúzott négy számból pontosan három szerepel a háromtalálatos szelvényeken. Ezekből a számhármasokból 4 db van. A három kihúzott szám mellett mindegyik szelvényen 2 db szám szerepel a 4 db ki nem húzott számból. Tehát 4-ből kell 2-t kiválasztani úgy, hogy a kiválasztás sorrendje nem számít. Ez $\binom{4}{2} = 6$-féleképpen lehetséges.

Tehát Sanyinak $4 \cdot 6 = 24$ db háromtalálatosa lenne.

II. rész

5. *Sík talajon áll három darab r sugarú gömb úgy, hogy páronként érintik egymást. Mekkora a mindhárom gömböt és az alapsíkot is érintő gömb és a négy gömbközéppont által meghatározott tetraéder térfogatának az aránya?* (*16 pont*)

Megoldás. A három egyforma egymást érintő gömb közül az egyiknek a középpontja legyen O_1 az *ábra* szerint. Ugyanennek a gömbnek és az alapsíknak az érintési pontja legyen T_1, a három egyforma gömböt és az alapsíkot is érintő gömb középpontja O_2, az O_2 középpontú gömb és az alapsíknak az érintési pontja T_2, végül az O_2 pontból a T_1O_1 szakaszra állított merőleges talppontja Y. Az O_1T_1 szakasz hossza legyen r, az O_2T_2 szakasz hossza x.



Mivel az O_1 és az O_2 középpontú gömbök érintik egymást, azért $O_1O_2 = r+x$. A $T_1T_2 = O_2Y$ szakasz hossza: $\frac{2\sqrt{3}}{3}r$, mivel a három egyforma egymást érintő gömb középpontjai egy $2r$ oldalú szabályos háromszöget határoznak meg, és T_1T_2 e háromszög magasságának $\frac{2}{3}$ részével egyezik meg. Az O_1O_2Y derékszögű háromszögre felírva a Pitagorasz-tételt kapjuk:

$$(r-x)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right)^2 = (r+x)^2.$$

Ebből adódik, hogy $x = \frac{r}{3}$.

A gömbök középpontjai által meghatározott tetraéder alapja egy $2r$ oldalú szabályos háromszög, magassága pedig $r - x = \frac{2}{3}r$; térfogata:

$$\frac{T_{\text{alap}} \cdot m}{3} = \frac{(2r)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2}{3}r}{3} = \frac{2\sqrt{3}r^3}{9}.$$

Az x sugarú gömb térfogata:

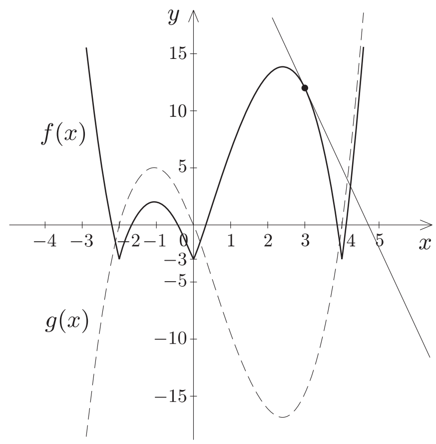
$$\frac{4\pi \left(\frac{r}{3}\right)^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{81}.$$

A térfogatok aránya:

$$\frac{4\pi r^3}{81} : \frac{2\sqrt{3}r^3}{9} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27}.$$

6. *Tekintsük a következő $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt: $f(x) = |x^3 - 2x^2 - 8x| - 3$.*
a) Hol van a függvénynek szélsőértéke?
b) Írjuk fel a függvény érintőjének egyenletét az $x = 3$ abszcisszájú pontjában. (*16 pont*)

Megoldás. *a)* Vizsgáljuk meg először a $g(x) = x^3 - 2x^2 - 8x$ függvényt. A g zérushelyei: $x = -2$, $x = 0$, $x = 4$. A g deriváltja: $g'(x) = 3x^2 - 4x - 8$, második deriváltja: $g''(x) = 6x - 4$.



Az első derivált zérushelyei: $\dfrac{2 \pm \sqrt{28}}{3}$, ezek a lehetséges szélsőértékhelyek. A második derivált segítségével megállapítható, hogy a g függvénynek a $\dfrac{2 + \sqrt{28}}{3} \approx 2{,}431$ lokális minimumhelye, a $\dfrac{2 - \sqrt{28}}{3} \approx -1{,}097$ pedig lokális maximumhelye.

Az $f(x) = |x^3 - 2x^2 - 8x| - 3$ függvény a g függvényből úgy származtatható, hogy a g függvény képének az x tengely alá eső részét tükrözzük az x tengelyre, majd az így kapott képet y tengely irányában 3 egységgel lefelé toljuk. Az f függvényt vizsgálva megállapítható, hogy a g függvényhez képest további három szélsőértékhely keletkezik, továbbá a g függvény egyik szélsőértékének minősége is megváltozik a transzformáció következtében.

Az f függvény szélsőértékhelyei:
– Abszolút minimumhelyek: $x = -2$, $x = 0$, $x = 4$.
– Lokális maximumhelyek: $x = \dfrac{2 + \sqrt{28}}{3}$, $x = \dfrac{2 - \sqrt{28}}{3}$.

b) A g függvény deriváltja az $x = 3$ helyen a $g'(3) = 7$ értéket veszi fel. Tehát a g függvény $x = 3$ abszcisszájú pontjában az érintő iránytangense $m_g = 7$. Az f függvény $x = 3$ abszcisszájú pontjában húzott érintő iránytangense a tükrözés miatt $m_f = -7$.

Az érintési pont koordinátája: $(3; 12)$. A kérdéses érintő egyenlete:

$$y - 12 = -7(x - 3), \quad \text{azaz} \quad y = -7x + 33.$$

7. *Valaki betesz a bankba* 50 000 Ft*-ot. Az első bank havi* 0,4% *kamatos kamatot fizetne egy éven keresztül, havonkénti tőkésítés mellett. A második bank havi* 0,3% *kamatos kamatot fizetne egy éven keresztül, havonkénti tőkésítés mellett, valamint minden negyedik hónap után megnöveli a bent lévő tőkeösszeget* 0,5%*-kal. A harmadik bank fél évre* 3% *kamatot ad, félévenkénti tőkésítéssel.*

a) Töltsük ki a következő táblázatot (1 tizedes jegyre kerekítve):

	Betét összege 1. hó vége	Betét összege 2. hó vége	Betét összege 3. hó vége	Betét összege 4. hó vége	Betét összege 5. hó vége	Betét összege 6. hó vége
Első bank						
Második bank						
Harmadik bank						

	Betét összege 7. hó vége	Betét összege 8. hó vége	Betét összege 9. hó vége	Betét összege 10. hó vége	Betét összege 11. hó vége	Betét összege 12. hó vége
Első bank						
Második bank						
Harmadik bank						

b) A táblázat alapján hány hónapra célszerű az első, illetve a második bankban elhelyezni a pénzünket? (*16 pont*)

Megoldás. *a*)

	Betét összege 1. hó vége	Betét összege 2. hó vége	Betét összege 3. hó vége	Betét összege 4. hó vége	Betét összege 5. hó vége	Betét összege 6. hó vége
Első bank	50 200	50 400,8	50 602,4	50 804,8	51 008	51 212,1
Második bank	50 150	50 300,5	50 451,4	50 855,7	51 008,3	51 161,3
Harmadik bank	50 000	50 000	50 000	50 000	50 000	51 500

	Betét összege 7. hó vége	Betét összege 8. hó vége	Betét összege 9. hó vége	Betét összege 10. hó vége	Betét összege 11. hó vége	Betét összege 12. hó vége
Első bank	51 416,9	51 622,6	51 829,1	52 036,4	52 244,5	52 453,5
Második bank	51 314,8	51 726,1	51 881,3	52 036,9	52 193,0	52 611,3
Harmadik bank	51 500	51 500	51 500	51 500	51 500	53 045

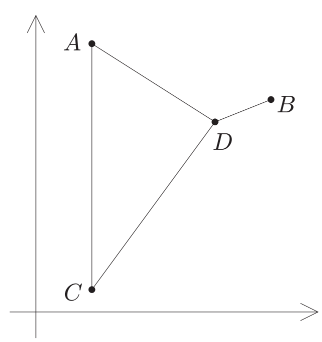
b) Az Első bankot akkor célszerű választani, ha 1, 2, 3 vagy 11 hónapra kívánja elhelyezni az összeget, a Második bankot akkor, ha 4, 5, 8, 9 vagy 10 hónapra kívánja elhelyezni a betétet. Egyébként a Harmadik bankot célszerű választani.

8. *Egy mentőrepülőgép súlyos sérültet szállítva az* $A(50;240)$ *koordinátájú katonai támaszpont kórházába tartott (a koordináták* km*-ben értendők), de a nyílt tengeren műszaki hiba miatt kényszerleszállást kellett végrehajtania a* $C(50;20)$ *koordinátájú pontban. A mentőszolgálat másik mentőrepülőgépe ekkor éppen az A támaszpont felé tartott, helyzete* $D(160;170)$ *volt,* 160 km*-re elegendő üzemanyag állt rendelkezésére, és nem szállított sérültet. A kényszerleszállástól számítva minimum mennyi idő alatt lehet a sérültet a másik repülőgéppel az A támaszpont kórházába szállítani, ha tudjuk, hogy az A támaszponton, illetve* $B(210;190)$ *koordinátájú kis szigeten van lehetőség üzemanyag felvételre, és a mentőrepülőgépek átlagsebessége* 1000 km/h*? Az üzemanyag felvétel (ha szükséges) és a sérült áthelyezése a másik gépre* 10–10 *percet vesz igénybe.* (*16 pont*)

Megoldás. Az *ábra* szemlélteti a feladatban szereplő objektumok helyzetét.

$$DC = \sqrt{(160-50)^2 + (170-20)^2} \approx 186 \text{ km},$$

ezért biztos, hogy kell tankolni. A DC távolsághoz hasonlóan számíthatók a következő távolságok: $AC = 220$ km, $AD \approx 130{,}38$ km, $DB \approx 53{,}85$ km, $BC \approx 233{,}45$ km.



$DACA$ útvonal esetén az összes távolság $\approx 570{,}38$ km, a $DBCA$ útvonal esetén $\approx 507{,}28$ km. Mindkét esetben az üzemanyag felvétel és a sérült áthelyezése ugyanannyi ideig tart, tehát a rövidebb, $DBCA$ útvonalat célszerű választani. A $t = \dfrac{s}{v}$ képlet alapján a repülőgép ez esetben $\approx 0{,}507\ 28$ órát, vagyis $\approx 30{,}44$ percet tölt a levegőben. Ehhez hozzáadva a sérült áthelyezésének és az üzemanyag felvételnek az idejét, a sérült ezen útvonal választása esetén 50,44 perc alatt kerül kórházba.

Tehát a sérült legkevesebb $\approx 50{,}44$ perc alatt juthat kórházba.

9. *a*) *Igazmondó (aki mindig igazat mond), Hazudós (aki mindig hazudik) és Bizonytalan (akiről soha nem lehet tudni, hogy éppen hazudott-e vagy nem) versenyt futottak, és úgy értek célba, hogy nem volt holtverseny. Egy matematikus, aki látta a versenyfutást, de nem ismerte őket, a következő kérdéseket tette fel nekik a verseny végén:*

Az elsőként beérkezőt megkérdezte: Ki lett a második? A válasz így hangzott: Igazmondó.

A másodikként beérkezőt megkérdezte: Te ki vagy? A válasz ez volt: Bizonytalan.

A harmadikként beérkezőt is megkérdezte: Ki ért be előtted? A válasz: Hazudós.

Milyen beérkezési sorrendet állapított meg ezek után a matematikus?

b) Válaszoljunk a következő kérdésekre (A, B, C halmazokat jelölnek):
Tudjuk, hogy $A \setminus B = C$. Igaz-e, hogy $B \cup C = A$?
Tudjuk, hogy $B \cup C = A$. Igaz-e, hogy $A \setminus B = C$? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Az elsőként beérkező nem lehetett „Igazmondó", mert ő mást mondott volna. A másodikként beérkező szintén nem lehetett „Igazmondó", mert akkor nem „Bizonytalan"-ként mutatkozott volna be. Tehát „Igazmondó" érkezett a harmadik helyen, és mivel ő igazat mond ezért biztosan „Hazudós" érkezett a második helyen. Az előzőekből adódóan „Bizonytalan" nyerte a futóversenyt.

b) Ha $A \setminus B = C$, akkor nem biztos, hogy $B \cup C = A$. Ellenpélda: $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{1; 4; 5\}$, $C = \{2; 3\}$.

Ha $B \cup C = A$, akkor nem biztos, hogy $A \setminus B = C$. Ellenpélda: $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{1; 2\}$, $C = \{2; 3\}$.