

I. rész

1. Az ABC szabályos háromszögben az A középpontú, AB sugarú kör kisebbik BC ívének B -hez közelebbi harmadolópontja D , C -hez közelebbi harmadolópontja pedig E . A B középpontú AB sugarú kör kisebbik AC ívének felezőpontja F . Mekkora az $ABDECF$ hatszög belső szögei? (11 pont)

2. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\sqrt{x^2 - 2x - 15} \cdot \lg(5 - x) \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0. \quad (12 \text{ pont})$$

3. Egy vihar után tizenkét telefonvonal közül négy nem működik. Ekkor négy vonalon megpróbálunk telefonálni. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a négy hívásból pontosan kettő lesz sikeres? (14 pont)

4. Mutassuk meg, hogy az $\{a_n\}$ számtani sorozatban:

$$(x - y)a_z + (y - z)a_x = (x - z)a_y,$$

ahol x , y és z természetes számok.

(14 pont)

II. rész

5. Egy húrtrapéz három csúcsának koordinátája a következő: $(-1; -3)$; $(5; -1)$; $(2; 3)$. Határozzuk meg a negyedik csúcs koordinátáit, ha az ismeretlen pont két koordinátájának szorzata negatív. (16 pont)

6. Egy iskola két párhuzamos osztálya közös dolgozatot írt, az elérhető legmagasabb pontszám 120 pont volt. Az A osztályban 74 pont, a B osztályban 84 pont lett az átlag. Az A osztályos lányok átlaga 71 pont, a B osztályos lányok pedig 81 pontot értek el átlagosan. Az összes lány átlaga 79 pont lett. A fiúk átlaga az A osztályban 76 pont, a B osztályban pedig 90 pont. Mennyi a két osztályban az összes fiú átlagpontszáma? (16 pont)

7. Egy kis patak vízmélységét a folyás irányára merőlegesen az $f: [0; 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x^3 - 9x}{9}$ függvény adja meg (ahol az egységek métert jelentenek).

a) A patak szélétől hány méterre a legmélyebb a víz?

b) Mekkora a legnagyobb vízmélység?

c) Mekkora a patak percenkénti vízhozama, ha a folyási sebességét $0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ -nak vehetjük?

8. Egy ötszög csúcsainak koordinátája: $A(0; 0)$, $B(12; 5)$, $C(12; 6)$, $D(10; 8)$, $E(4; 6)$.

a) Hány rácspont található az ötszög határvonalán?

b) Hány rácspont található az ötszög belsejében?

c) A rácspontokra rajzolt sokszögek területét meghatározhatjuk a következő képlettel: $t = \frac{h + 2b - 2}{2}$, ahol h a határvonalon, b a belsejében lévő rácspontok számát jelöli. Mennyi ezen képlet szerint a feladatban szereplő ötszög területe?

d) Határozzuk meg a fenti képlet ismerete nélkül az ötszög területét. (16 pont)

9. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\log_3 \log_2(4x^2) + \log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} = 1. \quad (16 \text{ pont})$$