[1]

A1. Határozzuk meg az
$$(x^2+y^2+z^2+8)^2 \le 36(x^2+y^2)$$
feltételt kielégítő (x,y,z) pontok halmazának a térfogatát.

A2. Alice és Bob játszanak. Felváltva vesznek el kavicsokat egy kupacból, amelyben eredetileg n darab kavics van. Minden lépésben egy prímszámnál eggyel kevesebb kavicsot lehet elvenni. Alice kezd és a játékot az nyeri, aki elveszi az utolsó kavicsot. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan n szám van, amelyre Bobnak van nyerő stratégiája. (Ha például $n=17$, akkor Alice elvehet 6 kavicsot és így 11 marad; ha Bob most 1-et vesz el, akkor a megmaradó 10-et Alice elveheti és ezzel nyer.)

A3. Az $1,2,3,\dots,2006,2007,2009,2012,2016,\dots$ sorozatot a következőképpen definiáljuk: $x_k=k$, ha $k=1,2,\dots,2006$ és $x_{k+1}=x_k+x_{k-2005}$, ha $k\ge 2006$. Bizonyítsuk be, hogy a sorozatnak létezik 2005 egymást követő tagja, amelyek mindegyike osztható 2006-tal.

A4. Adott $n>1$ egészre legyen $S=\{1,2,\dots,n\}$. Azt mondjuk, hogy az S egy π permutációjának lokális maximuma van a $k\in S$ helyen, ha

(i)	$\pi(k)>\pi(k+1)$	ha $k=1$;
(ii)	$\pi(k-1)<\pi(k)$ és $\pi(k)>\pi(k+1)$	ha $1<k<n$;
(iii)	$\pi(k-1)<\pi(k)$	ha $k=n$.

(Például ha $n=5$ és π az 1, 2, 3, 4, 5 helyeken rendre a 2, 1, 4, 5, 3 értékeket veszi föl, akkor π-nek a $k=1$ helyen 2, a $k=4$ helyen pedig 5 a lokális maximuma.) Átlagosan hány lokális maximuma van az S egy permutációjának, ha az átlag kiszámításakor az S összes permutációját figyelembe vesszük?

A5. Legyen az n páratlan pozitív egész, a θ pedig olyan valós szám, amelyre θ/π irracionális. Legyen $a_k=\operatorname{tg}(\theta+k\pi/n)$, $k=1,2,\dots,n$. Bizonyítsuk be, hogy
$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{a_1a_2\cdots a_n}$$
egész szám és határozzuk meg az értékét.

A6. Egy adott kör belsejében véletlenszerűen, egyenletes eloszlás szerint egymástól függetlenül kiválasztunk négy pontot. Mekkora a valószínűsége, hogy ezek a pontok egy konvex négyszög csúcsai?

B1. Bizonyítsuk be, hogy az $x^3+3xy+y^3=1$ egyenletű görbe egyetlen olyan háromelemű A, B, C ponthármast tartalmaz, amelynek pontjai különbözők és egy szabályos háromszög csúcsai. Határozzuk meg ennek a háromszögnek a területét.

B2. Bizonyítsuk be, hogy minden n-elemű $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ valós számhalmazhoz létezik az X-nek olyan nem üres S részhalmaza és olyan m egész szám, amelyekre teljesül, hogy
$$\left|m+\sum_{s\in S}s\right|\le\frac{1}{n+1}.$$

B3. Legyen az S egy síkbeli véges ponthalmaz. Az S egy lineáris felbontásának nevezzük az S olyan A, B részhalmazaiból álló – nem rendezett – párokat, amelyekre $A\cup B=S$, $A\cap B=\emptyset$, továbbá van olyan egyenes, amely nem tartalmaz S-beli pontot és elválasztja az A és B pontjait. (A vagy B lehet üres halmaz is.) Jelölje az S lineáris felbontásainak a számát L_S. Határozzuk meg minden n-re az L_S értékének maximumát az n elemű S halmazokon.

B4. Álljon a $\mathbf{Z}$ halmaz az $\mathbb{R}^n$ azon pontjaiból, amelyek minden egyes koordinátája 0 vagy 1. (A $\mathbf{Z}$ halmaznak ekkor 2^n eleme van, amelyek az n-dimenziós hiperkocka csúcsai.) Az $\mathbb{R}^n$, mint vektortér egy V alterére jelöljük $Z(V)$-vel a $\mathbf{Z}$ azon elemeinek a számát, amelyek benne vannak V-ben. Legyen a $0\le k\le n$ adott egész. Határozzuk meg a $V\cap\mathbf{Z}$ halmaz elemszámának a maximumát a k-dimenziós $V\subset\mathbb{R}^n$ alterek halmazán.

B5. Adott folytonos $f\colon[0;1]\to\mathbb{R}$ függvényre legyen
$$I(f)=\int_0^1 x^2f(x)\,dx \quad\text{és}\quad J(f)=\int_0^1 x\big(f(x)\big)^2\,dx.$$
Mennyi $I(f)-J(f)$ maximuma a fenti f függvények halmazán?

[1] A megoldások a következő oldalon találhatók:
`http://www.unl.edu/amc/a-activities/a7-problems/putnamindex.shtml`.

B6. Legyen $k > 1$ adott egész szám. Legyen $a_0 > 0$ és legyen

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{\sqrt[k]{a_n}}$$

ha $n \geq 0$. Határozzuk meg

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^{k+1}}{n^k}$$

értékét.