

I. rész

1. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert az egész számpárok halmazán:

$$\left. \begin{aligned} 9^x \cdot 3^y &= 81, \\ 6x + 6y + 5xy &= 0. \end{aligned} \right\}$$

(11 pont)

2. Az $1, 2, 3, \dots, n$ pozitív egész számok felhasználásával halmazokat képeztünk az alábbi módon:

A halmaz a páros számok halmaza;

B halmaz a 3-mal osztható számok halmaza;

C halmaz az 5-tel osztható számok halmaza.

a) Véletlenszerűen kiválasztva egy számot az n db szám közül, mekkora annak a valószínűsége, hogy azt nem használtuk fel a halmazok képzésekor, ha $n = 48$? (6 pont)

b) Ha az $A \cap B \cap C$ halmaznak 2 eleme van, akkor hány eleme lehet az $(A \cap B) \setminus C$ halmaznak? (7 pont)

3. Egy szarvasmarha telepen 1000 tehenet tartanak. Ezek egy évben 7 300 000 liter tejet adnak. A telep vezetője azt tapasztalta, hogy – valószínűleg az egy marhára jutó legelőterület növekedése miatt – ha a tehenek számát 5%-kal csökkentik, akkor az egy tehenre jutó éves tejhozam 10%-kal növekszik.

a) A tehenek számának 5%-os csökkentése esetén mennyivel növekszik az éves tejtermelés a gazdaságban? (5 pont)

b) Ilyen állomány esetében az a tény, hogy a tehenek számának $p\%$ -os csökkentésével egy tehen éves tejhozama $2p\%$ -kal növekszik, csak $p < 20$ esetén érvényes. Hány százalékkal kell csökkenteni a tehénállományt, hogy az éves tejtermelés 10%-kal növekedjen? (8 pont)

4. A $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$ prímszámokról a következőket tudjuk: $p_3 = p_1 + p_2$, $p_2^2 + 8$ is prímszám és $p_4 = 2p_1p_2p_3 + p_1 + p_3$.

Számítsuk ki a $p_1p_2p_3p_4$ szorzat értékét.

(14 pont)

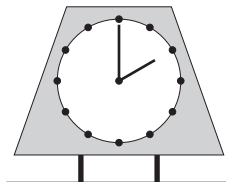
II. rész

5. A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^3 + px^2 + qx$ ($p \neq -2$, $q \neq 0$) függvényről tudjuk, hogy pontosan két zérushelye van, továbbá, hogy $f(2) = -p$.

a) Határozzuk meg a függvény zérushelyeit. (8 pont)

b) Az $f(x)$ függvény origón átmenő érintője hol metszi a függvény görbét? (8 pont)

6. Egy formatervező szimmetrikus trapéz alakú falemezre szerelt órát tervezett. Az óra körlapjának sugara 10 cm, középpontja a trapéz minden oldalától 12 cm távolságra van és a hosszabbik párhuzamos oldala a rövidebbnek kétszerese.



a) Mekkora területű falemezre van szükség? (7 pont)

b) 2 óra után legközelebb mikor lesz a két óramutató hajlásszöge ugyanakkora, mint 2-kor? (9 pont)

7. Egy városi állatkertben a 4 ragadozót (egy nőstény tigris, egy oroszlánt, egy leopárdot és egy jaguárt) 8 egymás melletti ketrecben helyezték el.

a) Hányféleképpen helyezhették el a ragadozókat a 8 ketrecben? (4 pont)

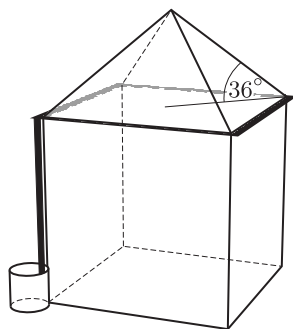
b) Az állatgondozók azt tapasztalták, hogy ha két ragadozó szomszédos ketrecbe kerül, akkor azok rendkívül agresszívvá válnak. Hányféleképpen helyezhették el a ragadozókat a 8 ketrecben úgy, hogy szomszédos ketrecekre ne kerüljenek állatok? (5 pont)

c) A jaguárt elszállították, és hoztak helyébe egy hím tigris. Annak érdekében, hogy a nőstény és a hím tigris „közeledjenek” egymáshoz, e két tigris szomszédos ketrecbe akarták elhelyezni. Ekkor hányféleképpen helyezhették el a ragadozókat, ha a két tigris szomszédos ketrecbe került, de ezen kívül nem voltak szomszédos ragadozók? (7 pont)

8. Egy négyzet alapú ház tetőszerkezete négyzet alapú egyenes gúla. Az oldalélek az alapnégyzettel 36° -os szöget zárnak be.

a) Számítsuk ki a tetőszerkezet oldallapjának és alaplajának a hajlásszögét.

(3 pont)



b) Mekkora a tetőszerkezet légtere, ha az oldaléle 8 m hosszú?

(4 pont)

c) A tetőszerkezet alapnégyzetét ereszcatorna veszi körül. A lehulló eső a tetőről az ereszcatornába, onnan pedig a ház egyik sarkánál függőlegesen haladó csatornán keresztül az alá helyezett egyenes körhenger alakú hordóba folyik. A hordó átmérője 68 cm, magassága 120 cm. Egy 15 percig tartó nyári felhőszakadás során a híradások szerint 20 mm csapadék hullott óránként. Megtelik-e a felhőszakadás után a tetőről lefolyt vízzel a hordó?

(9 pont)

9. a) Egy pedagógiai konferencia középiskolai szekciójába 12 fő jelentkezett. A 12 fős csoport két tagja (a moderátorok) a csoportból mindenkit ismertek. Öt olyan tagja volt a csoportnak, akik a moderátorokon kívül senkit sem ismertek; a szekció többi tagja közül pedig mindenki mindenkit ismert (az ismeretség minden esetben kölcsönös). Az első szekcióülés előtt, akik nem ismerték egymást, kézfogással bemutatkoztak egymásnak. Hány kézfogás történt?

(7 pont)

b) Az óvodai szekciónak három moderátora volt; ők szintén mindenkit ismertek a csoportból. A csoport többi tagjának a fele a moderátorokon kívül senkit sem ismert, míg a csoport többi tagja közül itt is mindenki mindenkit ismert (természetesen az ismeretség itt is minden esetben kölcsönös). Ebben a szekcióban is bemutatkoztak egymásnak azok, akik nem ismerték egymást, s így ebben a csoportban 35 kézfogásra került sor. Hány főből állt az óvodai szekció?

(9 pont)